WiSe 2007/08 16.11.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 5

Tutoriumsaufgabe 5.1 *Bewegung eines Massenpunkts*

Sei $\vec{r}(t)$ die Bahn eines Massenpunkts.

a) Zeigen Sie, dass sich der Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ folgendermaßen zerlegen läßt:

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{\vec{t}} + a_n \hat{\vec{n}},$$

wobei die Tangentialbeschleunigung a_t in Richtung des Tangenteneinheitsvektors $\hat{\vec{t}}$ zeigt und die Zentripetalbeschleunigung a_n in Richtung des Normaleneinheitsvektors $\hat{\vec{n}}$.

b) Berechnen Sie a_t und a_n für die Kreisbahn $\vec{r} = R(\cos\phi(t), \sin\phi(t), 0)$ für den *allgemeinen Drehwinkel* $\phi \equiv \phi(t)$. Was passiert im Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit ($\phi(t) = \omega t$)?

c) Berechnen Sie die Länge U eines vollständigen Umlaufs:

$$U = \int_0^T \mathrm{d}t |\dot{\vec{r}}(t)|.$$

Hinweis: nehmen Sie an, dass die Bewegung monoton im Gegenuhrzeigersinn verläuft ($\dot{\phi} > 0$).

Tutoriumsaufgabe 5.2 *Bewegung im Zentralfeld*

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Ellipsenbahn $\vec{r}(t) = (a\cos\omega t, b\sin\omega t, 0)$.

a) Zeigen Sie, dass diese Bahn die Bewegungsgleichung eines isotropen harmonischen Oszillators löst:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\omega^2\vec{r} = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$ und Energie $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ erhalten sind.

c) Berechnen Sie die Länge U eines vollständigen Umlaufs. Das hier auftretende Integral läßt sich auf ein *vollständiges elliptisches Integral 2. Art* zurückführen:

$$\mathrm{E}(m) \equiv \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \sqrt{1 - m\sin^2\phi}$$

Hinweis: Dies ist die Definition wie in `Mathematica`*, die im Bronstein ist anders!*

Aufgabe 5.3 *Frenetsche Formeln*

Bezogen auf eine Raumkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$, die i.a. nicht nach der Bogenlänge s parametrisiert ist, gelten folgende Formeln für Tangenten-, Normalen- und Binormaleneinheitsvektor sowie Krümmung und Torsion:

$$\hat{\vec{t}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \hat{\vec{n}} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}|} \qquad \hat{\vec{b}} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \qquad \kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \qquad \tau = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

Hier bedeutet $\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ die Ableitung nach t.

a) Zeigen Sie die erste Frenetsche Formel:

$$\hat{\vec{t}}' = \kappa \hat{\vec{n}}$$

Benutzen Sie hierbei die Kettenregel $\vec{r}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = |\dot{\vec{r}}|^{-1}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

b) Zeigen Sie, dass sich im Falle des harmonischen Oszillators ($m\ddot{\vec{r}} + m\omega^2\vec{r} = 0$) ebene Bahnen ergeben, d.h. $\tau = 0$.

Aufgabe 5.4 *Kurven in der Ebene*

Bestimmen Sie für die folgenden zwei Kurven die Bogenlänge, den Tangenten- $\hat{\vec{t}}$ und den Hauptnormaleneinheitsvektor $\hat{\vec{n}}$ und die Krümmung. Wie lautet die Torsion für alle diese Kurven?

a) Zykloidenbogen $\vec{x}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $\qquad t \in [0, 2\pi]$,

b) Katenoide $\vec{x}(t) = (t, a\cosh t/a)$, $\qquad t \in [0, \pi/2a]$.

Aufgabe 5.5 *Kurven im Raum*

Gegeben sei die *Vivianische Kurve* $\vec{r}(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t)$ für $0 \le t \le 2\pi$.

a) Zeigen Sie, dass diese Kurve sowohl auf einer Kugel um den Ursprung als auch auf einem Zylinder parallel zur z-Achse liegt, dass also gilt $x^2 + y^2 + z^2 = R_\mathrm{K}^2$ und $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_\mathrm{Z}^2$, und bestimmen Sie die Kugel- und Zylinderradien R_K und R_Z und den Schnittpunkt $(x_0, y_0, 0)$ der Zylinderachse mit der x-y-Ebene.

b) Skizzieren oder plotten Sie diese Kurve.

c) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\hat{\vec{t}}$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve.

Aufgabe 5.6 *Schraubenlinie*

Gegeben sei die Schraubenlinie $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, v_0 t)$, für $0 \le t \le 2\pi$ und $v_0 = h/2\pi$.

a) Schreiben Sie die Kurve mit der Bogenlänge als Parameter um und berechnen Sie die Länge der Kurve.

b) Bestimmen Sie den Tangenten- $\hat{\vec{t}}$, den Hauptnormalen- $\hat{\vec{n}}$ und den Binormaleneinheitsvektor $\hat{\vec{b}}$.

c) Bestimmen Sie die Krümmung κ und die Torsion τ der Kurve und überprüfen Sie, dass das Verhältnis κ/τ konstant ist. Lancrets Theorem besagt, dass ein konstanter Quotient von Torsion und Krümmung notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Kurve eine Schraubenlinie ist.

Ergänzungssaufgabe 5.7 *Wiederholung: Diagonalisierung von Matrizen*

Berechnen Sie Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren v_i für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -6 \\ -5 & 13 & -6 \\ -8 & 14 & -7 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix A, so dass $A^{-1}MA = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{smallmatrix}\right)$.

Abgabe: Dienstag, 27.11.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).