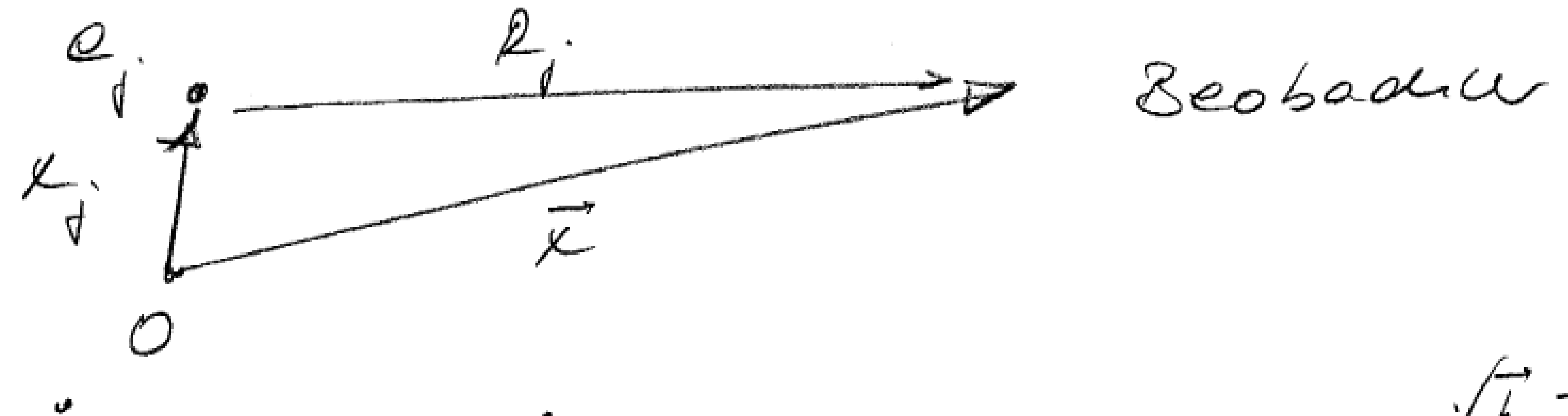
# 8.2. Elastische und inelastische Streuung an quasi-freien Ladungen

Wir betrachten in diesem Kapitel die Streuung von elm. Wellen an quasi-freien Ladungen, d.h. $\omega \gg$ atomare Frequenzen. Dies ist für die Streuung von Röntgenstrahlen an Atomen der Fall.

Sei $\vec{E}(\vec{x},t) = E_0\, \varepsilon\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ eine einfallende Welle mit Amplitude $E_0$ und Polarisation $\vec{\varepsilon}$. Dann gilt für $v_j \ll c$ (nichtrel. Grenzfall) für die gestreute Welle

$$\vec{E}_s(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\sum_j e_j \frac{1}{R_j}\left[\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}_j)\right]_{ret}$$

wobei




und $$\dot{\vec{\beta}}_j = \frac{1}{c}\dot{\vec{v}}_j = \frac{e_j}{m_j c} E_0\, \vec{\varepsilon}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}_j-\omega t)}$$

$$\Rightarrow\ \vec{E}_s(\vec{x},t) = \frac{E_0}{c^2}\left(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\varepsilon})\right)$$

$$\sum_j \frac{e_j^2}{m_j}\frac{1}{R_j}\exp\left[i\left(\vec{k}\,\vec{x}_j-\omega\left(t-\frac{R_j}{c}\right)\right)\right]$$

Wir nähern nun

$$R_j = |\vec{x}-\vec{x}_j| \cong \underbrace{|\vec{x}|}_{=r} - \vec{n}\cdot\vec{x}_j$$

und erhalten

$$\vec{E}_s(\vec{x},t) \cong \frac{E_0}{c^2}\left(\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\varepsilon})\right) e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\frac{1}{r}\sum_j \frac{e_j^2}{m_j}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j(t)}$$

wobei

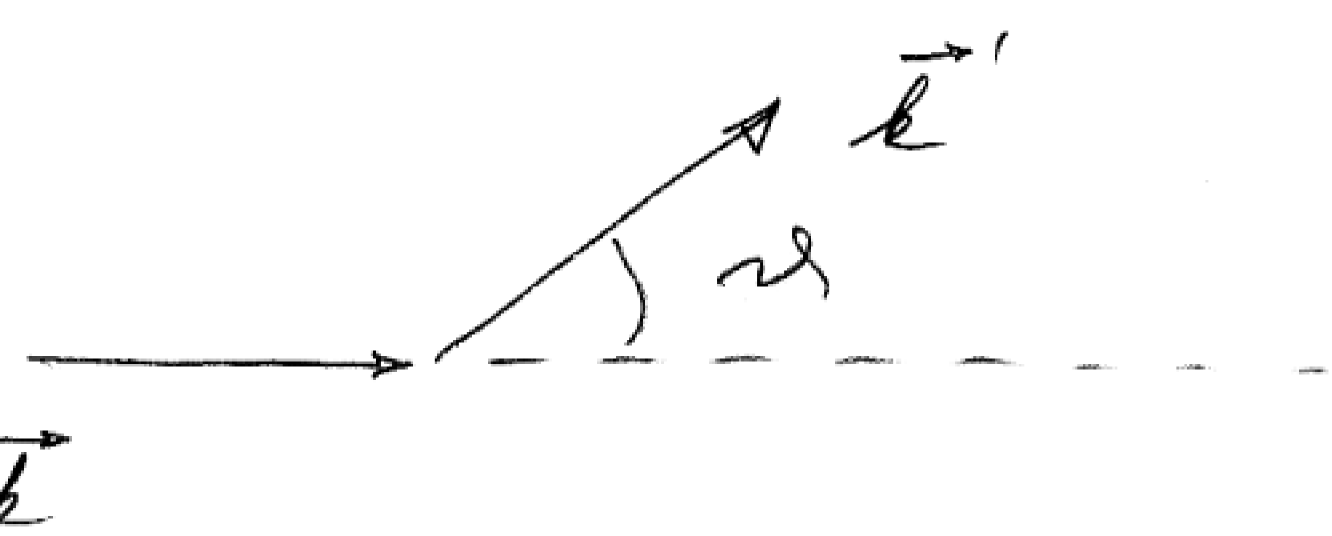
$$\vec{q} = \frac{\omega}{c}\vec{n} - \vec{k} = \vec{k}' - \vec{k}$$

der Streuvektor ist

Damit ergibt sich für den WQ

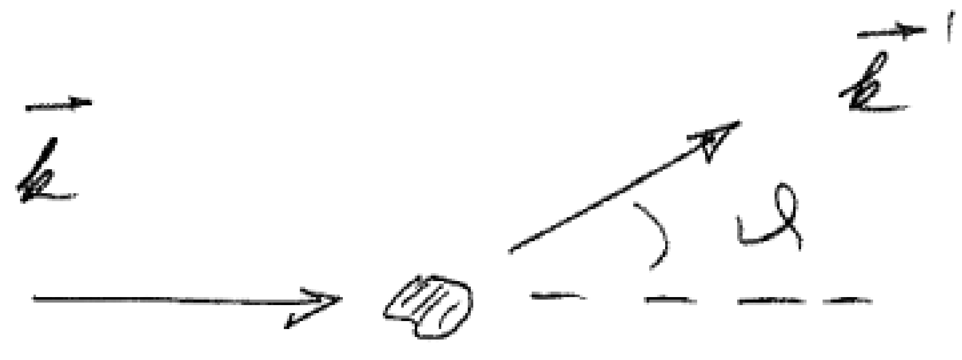
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_j}\right|^2 \sin^2\Theta$$

$$\Theta = \sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{n})$$




## 1. Kohärente und Inkohärente Streuung

Der Wirkungsquerschnitt hängt stark von $\vec{q}$ ab. Die Größenordnung der $|\vec{x}_j|$ ist gleich der Dimension $a$ des gebundenen Systems: $|\vec{x}_j| \sim a$. Der Wirkungsquerschnitt ist sehr unterschiedlich in den Grenzfällen $qa \gg 1$ und $qa \ll 1$.




$\vartheta = \measuredangle(\vec{k}, \vec{n})$ Streuwinkel

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{c}\vec{n} - \vec{k}\right)^2 = 2k^2(1-\cos\vartheta)$$
$$= 4k^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 2k \sin\frac{\vartheta}{2}}$$ Betrag des Streuvektors

$ka \ll 1 \Longrightarrow qa \ll 1 \quad \forall\, \vartheta$

$ka \ll 1$ $qa$ ist nur in Vorwärtsrichtung $\vartheta < \vartheta_c \sim \frac{1}{ka}$ viel kleiner als 1 und bei großen Winkeln schließend viel größer als 1

$qa \ll 1 \Rightarrow e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_j} \approx 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\bigg|_{qa\ll 1} \cong \left|\sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2}\right|^2 \sin^2\Theta$$

Für ein Atom mit $Z$ Elektronen hat man insbesondere

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\bigg|_{qa\ll 1} \cong Z^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\Theta$$

Die Wirkung der $Z$ Elektronen ist also KOHÄRENT: Der WQ ist gleich $Z^2$ mal dem 1-Teilchen Querschnitt.

Für $qa \gg 1$ sind die Exponenten sehr groß und haben sehr unterschiedliche Werte. Die schnell oszillierenden Kreuzterme im Quadrat der Summe werden sich deshalb zu Null mitteln. Nur die Diagonalterme bleiben übrig so daß gilt

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{qa \gg 1} \cong \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2}\right)^2 \sin^2\Theta$$

d. h. für Atome

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{qa \gg 1} \cong Z \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\Theta$$

In diesem Fall überlagern sich die Beiträge der einzelnen Elektronen inkohärent

Quantenmechanik:

Thomas-Fermi-Modell

$$a \cong 1.4\, a_B\, Z^{-1/3} \quad ; \quad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$\vartheta_c \sim Z^{1/3} / \hbar\omega\,(\mathrm{keV})$$

# Röntgenstreuung an Atomen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{Z} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_j} \right|^2}_{= \text{ Strukturfaktor}}$$

Mittelung über Positionen $\vec{x}_j$ (QM):

$w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z)$ Wk. dichte

$$F^2(q) := \int \left| \sum_{j=1}^{Z} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_j} \right|^2 w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) \prod_{k=1}^{Z} d^3x_k$$

= inelastischer Formfaktor

Dann lautet der gemittelte Querschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} F^2(q)$$

Diese allgemeine Form (WQ am Einzelsystem mal Formfaktor) ist für viele Streuprobleme charakteristisch. Sie kann dazu benützt werden um aus den gemessenen WQ'n etwas über die Struktur des Systems zu lernen.

$$F^2(0) = Z^2$$

Wir spalten den Formfaktor in diagonale und nicht-diagonale Terme auf

$$F^2(q) = Z + Z(Z-1)\, P(q)$$

$$Z(Z-1)\, P(q) \equiv \sum_{i \neq j} \int e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)\, d^3x_i\, d^3x_j$$

wobei

$$w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \int \prod_{k \neq i,j} d^3x_k \; w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z)$$

die Wk. verteilung für 2 Elektronen ist.

$$\lim_{q \to \infty} P(q) = 0$$

(Riemann - Lebesgue Lemma)

$$\curvearrowright \lim_{q \to \infty} F^2(q) = Z$$

wie erwartet

Für hohe Impulsüberträge und $\hbar\omega \gg$ atomare Anregungsenergien (tief inelast. Bereich) wird also der WQ konstant und zwar gleich $Z$ mal dem 1-Teilchen WQ.

Die Wk. verteilung für 1 Elektron ist

$$w_i(\vec{x}_i) = \int w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) \prod_{k \neq i} d^3x_k$$

Wir definieren die Korrelationen $c_{ij}$ durch

$$w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = w_i(\vec{x}_i)\, w_j(\vec{x}_j) + c_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

Dann ist

$$Z(Z-1)\, P(q) = \sum_{i \neq j} F_i(\vec{q})\, F_j^*(\vec{q}) + \sum_{ij} C_{ij}(\vec{q})$$

mit

$$F_i(\vec{q}) = \int w_i(\vec{x})\, e^{i\vec{q}\vec{x}}\, d^3x$$

$$C_{ij}(\vec{q}) = \int c_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)\, e^{i\vec{q}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}\, d^3x_i\, d^3x_j$$

$$\overline{\sum_j e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j}} = \int \prod_{k=1}^{Z} d^3x_k \, w(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_Z) \prod_{j=1}^{Z} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{Z} F_j^*(\vec{q})$$

Also

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} F_{el}^2(q)$$

mit $F_{el}^2(q) = \left| \sum_{j=1}^{Z} F_j(q) \right|^2$

Diese elastischen Formfaktoren kann man folgendermaßen interpretieren. Die Ladungsdichte der Elektronen ist

$$\rho(\vec{x}) = e \sum_{j=1}^{Z} \delta(\vec{x}-\vec{x}_j)$$

und der zugehörige Mittelwert ist

$$\langle\rho\rangle(\vec{x}) = \int e \sum_{j=1}^{Z} \delta(\vec{x}-\vec{x}_j) \, w(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_Z) \prod_{k=1}^{Z} d^3x_k$$
$$= e \sum_{j=1}^{Z} w_j(\vec{x})$$

Die Fouriertransformierte davon ist

$$\langle\hat{\rho}\rangle(\vec{q}) = \int d^3x \, e^{-i\vec{q}\vec{x}} \, e \sum_{j=1}^{Z} w_j(\vec{x})$$
$$= e \sum_j F_j(\vec{q})$$

Also ist

$$e^2 F_{el}^2(\vec{q}) = \left| \langle\hat{\rho}\rangle(\vec{q}) \right|^2$$

## B. Elastische Streuung

Für die Bestimmung des elastischen Streuquerschnitts ist derjenige Teil der gestreuten Welle auszuwählen, der die Frequenz $\omega$ hat. Der Ausdruck für das gestreute elem. Feld $\vec{E}_s(\vec{x},t)$ hängt über den Faktor $e^{-i\omega t}$ <u>und</u> $\sum_j \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j)$ von der Zeit ab. Letztere Zeitabhängigkeit führt dazu, daß im Feld der gestreuten Welle neben der Frequenz $\omega$ noch andere Frequenzen vorkommen.

Den Anteil mit Frequenz $\omega$ erhält man durch

$$\int dt\, \cancel{e}^{i\omega t}[\cancel{e}^{-i\omega t} \ldots \quad ]$$

also durch zeitliche Mittelung über den Faktor $\sum_j \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j)$

Folglich ist der elastische Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} \left| \overline{\sum_j e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j}} \right|^2$$

wobei der Querstrich eine zeitliche Mittelung bedeutet.

Wir ersetzen das zeitliche Mittel durch ein Scharmittel über die Verteilungsfunktion $w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_z)$; siehe Statistische Mechanik Vorlesung.

d.h. der elastische Formfaktor ist gleich dem Betragsquadrat der Fouriertransformierten der mittleren Ladungsverteilung

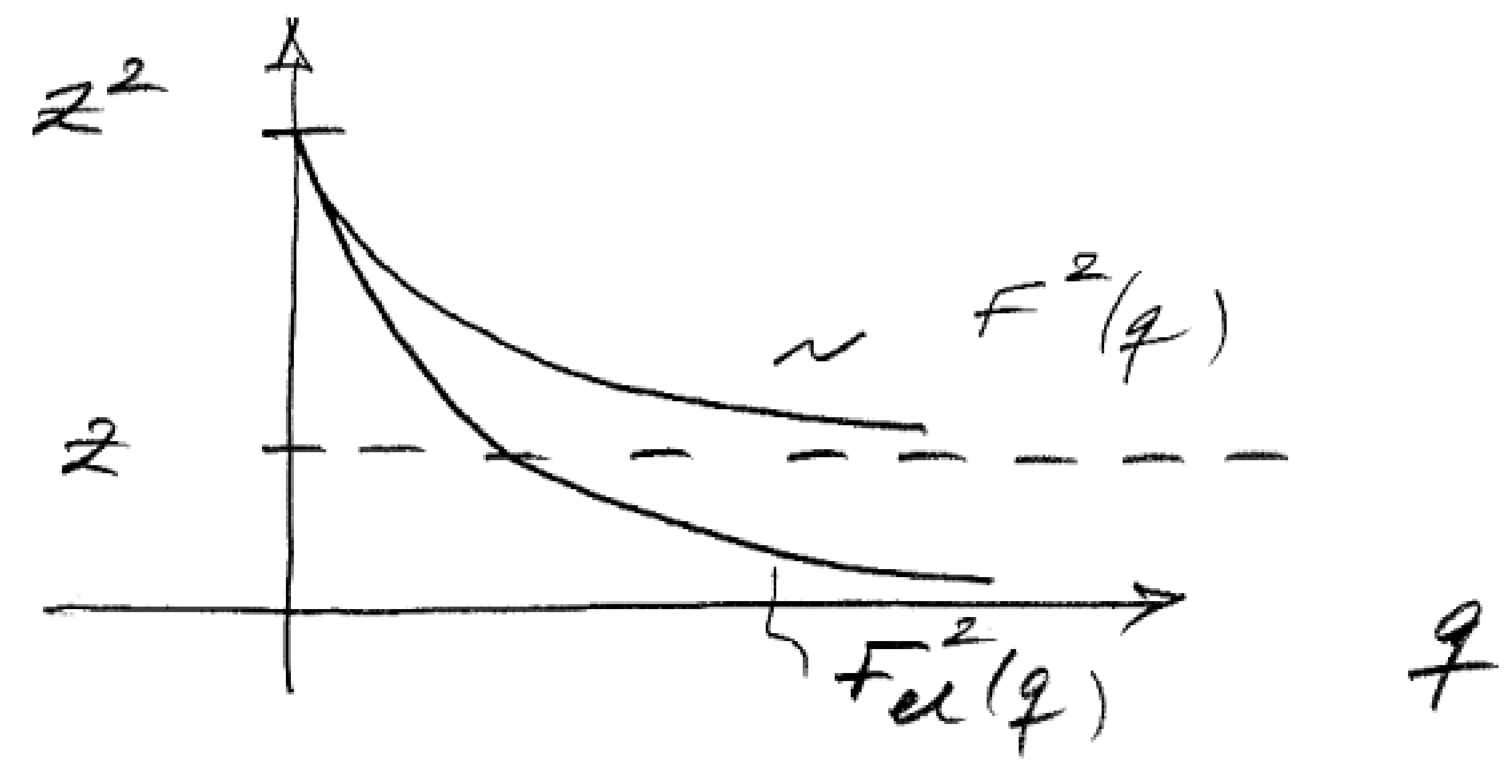
In Vorwärtsrichtung ist $q = 0$ und damit $F_{el}(0) = 1$ $\curvearrowright$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = Z^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th}$$

Weiter gilt (Riemann-Lebesgue Lemma)

$$\lim_{q\to\infty} F_{el}(q) = 0$$

Qualitativ gilt damit für die Formfaktoren




Beachte auch, daß

$$Z(Z-1)\,P(q) = F_{el}^2(q) - \sum_{j=1}^{Z} |F_j(q)|^2 + \sum_{i\neq j} C_{ij}(q)$$

ist. Vernachlässigt man Korrelationen, so fällt der letzte Term weg und man hat

$$F^2(q) = F_{el}^2(q) + \left(Z - \sum_{j=1}^{Z} |F_j(q)|^2\right)$$

Aus Streuexperimenten kann man also Informationen über den Aufbau der Atome bekommen. Die Wellenlänge der Sonde muß kleiner sein als die

Dimension der Objekte; sonst müsste man nur die Werte der Formfaktoren bei $q=0$ einsetzen.

## 8.3. Streuung in Gasen und Flüssigkeiten

In diesem Kapitel diskutieren wir die folgende Fragestellung: Was ist die Streuung einer ebenen Welle an einer lokalisierten Inhomogenität einer Dielektrikums?
Anwendungen sind
(i) Streuung von Licht an Staubpartikeln der Luft
(ii) Streuung von Licht an Dichteschwankungen in einem Gas (Lorentz-Theorie)

### A. Allgemeine Theorie

$\mu = 1$, keine Leitungsladungen und Leitungsströme

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot}\vec{E} - \frac{i\omega}{c}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$$

wobei $\vec{B}(\vec{x},\omega)$ und $\vec{E}(\vec{x},\omega)$ die Felder im Frequenzraum sind.

Die physikalische Situation beschreiben wir durch

$$\varepsilon(\vec{x},\omega) = \underbrace{\varepsilon_0(\omega)}_{\text{homogenes Medium}} + \underbrace{\varepsilon_1(\vec{x},\omega)}_{\text{Inhomogenität}}$$

Wir stellen die Felder durch Potentiale dar

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A} - \operatorname{grad} \varphi$$

und verlangen (Eichung)

$$\operatorname{div} \vec{A} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \varphi = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A}}_{(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\vec{A}} = - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}$$

$$= - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \underbrace{\vec{E}}_{-\frac{i\omega}{c}\vec{A} - \operatorname{grad}\varphi} - \frac{i\omega}{c} \underbrace{\varepsilon_1 \vec{E}}_{4\pi \vec{P}_1}$$

$\varepsilon_1 \vec{E} = 4\pi \vec{P}_1$ ; $\vec{P}_1$ = zusätzliche Polarisationsdichte der lokalisierten Inhomogenität

$$\Rightarrow \left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(\omega)\right] \vec{A} = \frac{4\pi i\omega}{c} \vec{P}_1$$

Die Gleichung für $\varphi$ erhält man wie folgt:

$$0 = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + 4\pi \vec{P}_1)$$

$$= \varepsilon_0 \Big( \underbrace{\frac{i\omega}{c} \operatorname{div} \vec{A}}_{-\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2}\varphi} - \Delta\varphi \Big) + 4\pi \operatorname{div} \vec{P}_1$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0\right] \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P}_1$$

Mit der Gleichung

$$\vec{A} := -\frac{i\omega}{c}\,\varepsilon_0\,\vec{Z}$$

definieren wir den Hertz'schen Vektor. Nach der Eichbedingung gilt

$$\varphi = -\operatorname{div}\vec{Z}$$

somit gilt für $\vec{Z}$ die Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,Z = -\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\vec{P}_1 \qquad (*)$$

wobei $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n_0^2(\omega)$ ; $n_0^2(\omega) \equiv \varepsilon(\omega)$.

Die elem. Felder ergeben sich aus $\vec{Z}$

$$\vec{B} = -i\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0 \operatorname{rot}\vec{Z}$$

$$\vec{E} = k^2\vec{Z} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}$$

Wir verwandeln nun die Gleichung $(*)$ in eine Integralgleichung. Dabei sollte man beachten, daß die rechte Seite eine Funktion von $Z$ ist: $\vec{P}_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\vec{E}$.

Die Greensche Funktion für

$$(\Delta + k^2)\,G = \delta$$

kennen wir bereits (Helmholtzgleichung)

$$\vec{Z}(\vec{x}) = \vec{Z}^{(0)} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\vec{P}_1(\vec{x}')$$

wobei $\vec{Z}^{(0)}$ die einfallende Welle ist.

Der zweite Term, $\vec{Z}^{(s)}$, bedeutet das Streufeld.

In großen Abständen $\vec{R}$ von der Inhomogenität gilt

$$\vec{Z}^{(s)}(\vec{x}) = \frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{\varepsilon_0} \int \vec{P}_1(\vec{x}')\, e^{-i\vec{k}'\vec{x}'}\, d^3x'$$

mit $\vec{k}' = k \cdot \vec{n}$ ; $\vec{n} = \vec{R}/|\vec{R}|$

Die Streufelder ergeben sich zu

$$\vec{B}^{(s)} = \frac{k^2}{n_0} \frac{e^{ikR}}{R}\, \vec{n} \times \tilde{\vec{P}}_1(\vec{k}')$$

$$\vec{E}^{(s)} = \frac{k^2}{n_0^2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(n \times \tilde{\vec{P}}_1(\vec{k}')\right) \times \vec{n}$$

$$= \frac{1}{n_0} \vec{B}^{(s)} \times \vec{n}$$

mit $\tilde{\vec{P}}_1(\vec{k}') = \int \vec{P}_1(\vec{x}')\, e^{-i\vec{k}'\vec{x}'}\, d^3x'$

Fügt man den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ wieder dazu, so gilt

$$\vec{B}^{(s)} = \frac{1}{R} \frac{k^2}{n_0}\, \vec{n} \times \tilde{\vec{P}}_1(\vec{k}', t_{ret})$$

$$\vec{E}^{(s)} = \frac{1}{n_0} \vec{B}^{(s)} \times \vec{n}$$

wobei $t_{ret} = t - \frac{R}{(c/n_0)}$.

Wir verwenden $\nabla\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) \equiv ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}$

Interessiert man sich für die Polarisation der auslaufenden Welle in Richtung von $\vec{\varepsilon}\,'$ (mit $\vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{n} = 0$) so hat man $\vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{E}^{(s)}$ zu berechnen.

$$\vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{E}^{(s)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{k^2}{n_0} \vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{\tilde{P}}_1$$

Der zugehörige Poynting Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} n_0 \left| \vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{E}^{(s)} \right|^2 \vec{n}$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{c}{4\pi} n_0 \left( \frac{k^2}{n_0} \right)^2 \left| \vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{\tilde{P}}_1 \right|^2 \vec{n}$$

Die zeitlich gemittelte Intensität der gestreuten Welle ist dann

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \left\langle \left| \vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{\tilde{P}}_1 \right|^2 \right\rangle$$

## B. Streuung von langen Wellen

$\lambda \gg$ Systemdimension

$e^{i\vec{k}'\vec{x}'} \approx 1$ (Dipolnäherung)

$$\curvearrowright \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \left\langle \left| \vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{p} \right|^2 \right\rangle$$

$$\vec{p} = \int P_1(\vec{x}\,')\, d^3x'$$

Dipolmoment der Inhomogenität

Ist $n_0(\omega) \approx n_0(0)$

$$\frac{dI}{d\Omega} \sim k^4 \sim \lambda^{-4}.$$

## Beispiel

Streuung an einer dielektrischen Kugel mit Radius $a$. Da $\lambda \gg a$ darf man $\vec{p}$ statisch berechnen.

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\, a^3\, \vec{E}^{(0)}$$

$\vec{E}^{(0)}$ einfallendes elektr. Feld

$\varepsilon$ DK der Kugel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right|^2 \left|\vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{\varepsilon}\right|^2 ;$$

$\vec{\varepsilon}$: Polarisationsvektor der einfallenden Welle

$\vec{\varepsilon}\,'$: —"— gestreuten Welle

## c. Bornsche Näherung

Wenn man in der Integralgleichung auf der rechten Seite die Ersetzung

$$\vec{P}_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \vec{E}(\vec{x}\,') \to \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \vec{E}^{(0)}(\vec{x}\,')$$

vornimmt, d.h. die Rückwirkung des Streufeldes vernachlässigt, spricht man von der Bornschen Näherung.

Dann gilt

$$\tilde{\vec{P}}_1(\vec{k}\,') = \int d^3x'\, e^{-i\vec{k}\,'\vec{x}\,'} \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \underbrace{\vec{E}^{(0)}(\vec{x}\,')}_{\substack{\vec{\varepsilon}\, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} E_0 \\ \text{ebene Welle}}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \tilde{\varepsilon}_1(\vec{k}\,' - \vec{k})\, E_0\, \vec{\varepsilon}$$

Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{BORN}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 \left|\vec{\varepsilon}\,' \cdot \vec{\varepsilon}\right|^2 \left|\tilde{\varepsilon}_1(\vec{k}\,' - \vec{k})\right|^2$$

+) Der Energiefluß der einfallenden Welle ist dem Betrag nach $= \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0 |\vec{E}^{(0)}|^2$ $= \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0 E_0^2$; das zeitliche Mittel gibt ebenfalls einen Faktor $\frac{1}{2}$.

Dipolnäherung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 \left|\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}\,'\right|^2 \left|\int \varepsilon_1(\vec{x}\,')\,d^3x'\right|^2$$

Integration über alle Raumrichtungen

$$\sigma = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 \left|\int \varepsilon_1(\vec{x}\,')\,d^3x'\right|^2 .$$