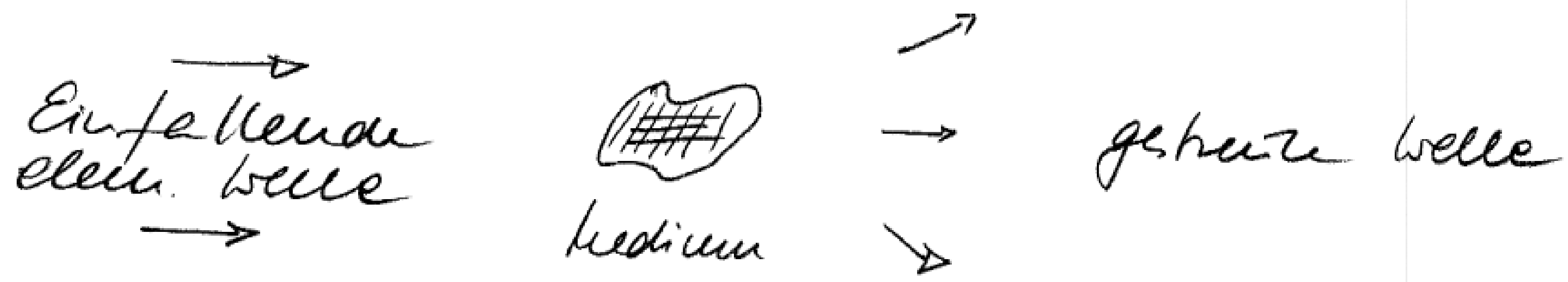
8. Streuung elektromagnetischer Wellen



Fällt eine elem. Welle auf ein Medium ein so bewirkt sie eine Bewegungsänderung der in diesem Medium befindlichen Ladungen. Diese zeitlich veränderlichen Ladungsverteilungen führen zur Abstrahlung von gestreuten Wellen. Auf diesem Streuprozeß beruht z.B. die blaue Farbe des Himmels und die rote Farbe der untergehenden Sonne. Außerdem sind Streuprozesse von Bedeutung für Strukturuntersuchungen von Materie.

8.1. Harmonisch gebundene Elektronen

Ladung e
Oszillatorfreq. ω_0 ; Dämpfung γ
Masse m
Teilchenbahn $\vec{z}(t)$

Bewegungsgleichung

$$(*) \quad m\ddot{\vec{z}}(t) + \underbrace{m\gamma\dot{\vec{z}}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{m\omega_0^2\vec{z}}_{\text{harm. Bindung}} = \underbrace{e\vec{E}}_{\text{elektr. Feld}} + O\left(\frac{v}{c}\right)$$

$v \ll c$: vernachlässige Lorentzkraft
$e\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$

Einfallende ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}\, E_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

Polarisation — Amplitude

Wir nehmen an, daß $\lambda \gg |\vec{x}(t)|$
so daß $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \approx 1$

Dann wird die Bewegungsgleichung zu

$$m\ddot{\vec{x}} + m\gamma\dot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = e E_0 \vec{\varepsilon}\, e^{-i\omega t}$$

Die Lösung dieser Dgl. setzt sich aus der allgem. Lösung der homogenen Gleichung, x_h, und einer partikulären Lösung, x_p, der inhomogenen Gleichung zusammen. Die homogene Lösung x_h zerfällt auf einer Zeitskala $\tau \sim 1/\gamma$ (Einschwingvorgang)

$$\vec{x}_p = \vec{a}\, e^{-i\omega t} \qquad \text{Ansatz für part. Lsg.}$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2\right)\vec{a} = \frac{e}{m} E_0 \vec{\varepsilon}$$

Man findet also ein zeitabh. Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = e\vec{x}(t)$$

$$= \frac{e^2 E_0}{m}\, \vec{\varepsilon}\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\, ;$$

$$= \alpha(\omega)\, \vec{E}$$

$\alpha(\omega)$ = Polarisierbarkeit

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Wir verwenden nun die Larmor Formel für die pro Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung; $\langle\rangle$ = zeitliche Mittelung

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\langle \ddot{\vec{p}}^{\,2} \rangle}{4\pi c^3} \sin^2\Theta$$

$$\langle \ddot{\vec{p}}^{\,2} \rangle = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^{\,2} E_0^2 \frac{e^4}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\Theta = \sphericalangle(\underset{\sim \vec{E}}{\vec{p}}, \vec{R})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\Theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} E_0^2$$

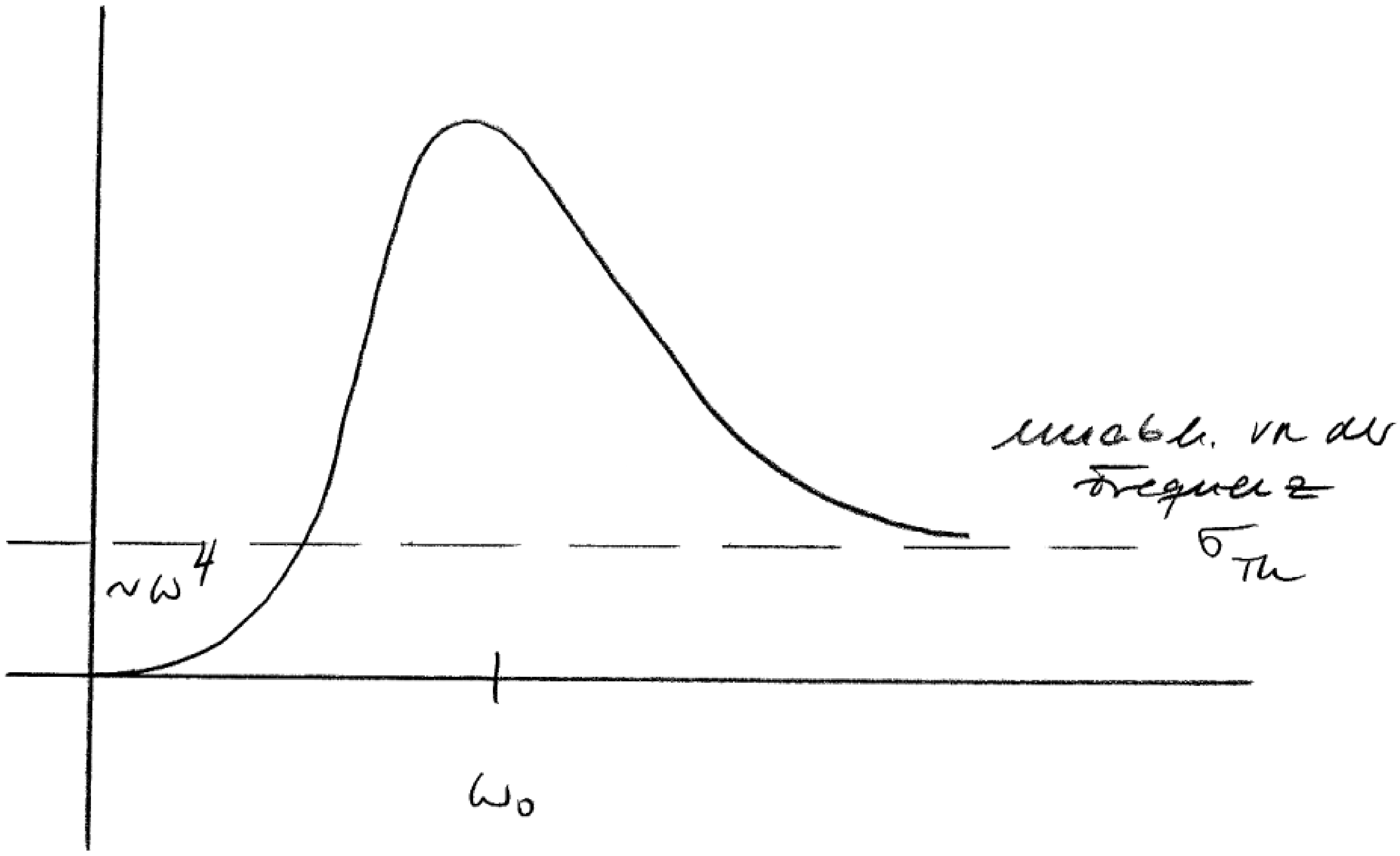
Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{gestr. Leistung pro } d\Omega}{\text{einfall. Leistung pro Fläche}} = \frac{dP/d\Omega}{\langle|\vec{S}|\rangle}$$

$$\langle|\vec{S}|\rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2) + (\omega\gamma)^2} \sin^2\Theta}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



$$\sigma_{Th} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \pi R_0^2 \quad (\text{klass. WQ})$$

$$R_0 = 4.6 \text{ fm}$$

$$R_e = \frac{3}{5}\,\frac{e^2}{mc^2} \approx 1.7 \text{ fm}$$

a. Thomson Streuung

Grenzfall hoher Frequenzen $\gg \omega_0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}$$

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \underset{\text{Elektronen}}{\approx} 0.665\; 10^{-24}\ \text{cm}^2$$

i) Setzt man σ_{Th} mit der klassischen Streuung von Teilchen an einer Kugel mit Radius R_0 gleich so gilt $\sigma_{Th} = \pi R_0^2$;
$R_0 \approx 4.6\ \text{fm} = \mathcal{O}(R_e)$; $R_e = \frac{3e^2}{5mc^2}$
("Elektronenradius")

ii) Resultat aus der klassischen ED verliert Gültigkeit für $\hbar\omega \sim mc^2$. Dann setzt Compton Streuung ein (Teilchencharakter der elm. Strahlung: Photonen)

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{el} \to 0 \qquad \text{für} \quad \hbar\omega \gg mc^2$$

da inelastische Comptonstreuung!

→ Klein-Nishina Formel
(quantenmech. Berechnung des WQ)

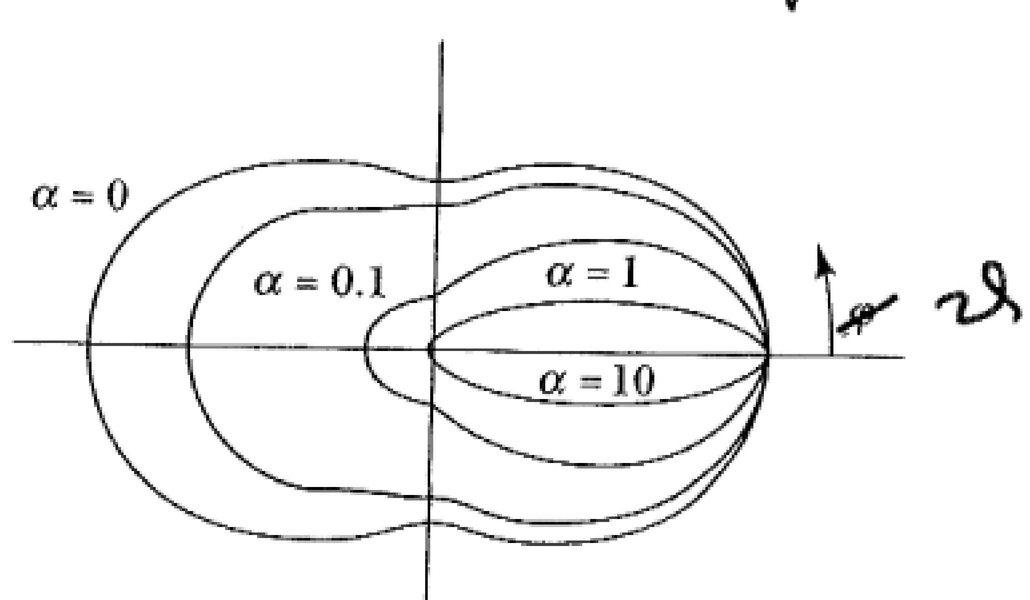


FIGURE 10-2. Angular dependence of Thomson-Compton scattering for various photon energies $\alpha = \hbar\omega/m_ec^2$.

(Heald Marion)

6. Rayleighstreuung

Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = \sigma_{Th} \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \sim \omega^4$$

Da $\hbar\omega_{\text{sichtbar}} / \hbar\omega_{at} \cong 0.1$ kann man diese Formel auf die Streuung von sichtbarem Licht an Atomen anwenden. Die ω^4 - Abhängigkeit führt dazu, daß blaues Sonnenlicht in der Atmosphäre stärker als rotes gestreut wird.

$$\frac{\sigma_{blau}}{\sigma_{rot}} = \frac{\omega_{blau}^4}{\omega_{rot}^4} \cong 10$$

wobei wir $\omega_{blau} / \omega_{rot} = \lambda_{rot} / \lambda_{blau} \approx 1.8$ verwendet haben.

Das Streulicht enthält also etwa zehnmal mehr blaues als rotes Licht. Daher erscheint der Himmel blau. Ein Sonnenuntergang kann dagegen rot erscheinen, weil der blaue Anteil durch die Streuung reduziert wurde.

c) Resonanzfluoreszenz

Bei $\omega = \omega_0$ hat der WQ ein Maximum der Stärke

$$\sigma_{res} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Dieser Grenzfall ergibt sich insbesondere dann, wenn Strahlung eines bestimmten Atomübergangs von einem Atom derselben Sorte wieder absorbiert wird.

Was ist γ ?

Im Bohr'schen Atommodell gilt

$$a_B \cong 0{,}53\ \text{Å} = \left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)$$

$$v_{at} = \alpha \cdot c$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$ Sommerfeld-Konstante

$$\omega_{at} \approx \frac{v_{at}}{a_B} = \frac{me^4}{\hbar^3} \approx 4 \cdot 10^{16}\ s^{-1}$$

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a_B}\alpha^3 \omega_{at}$$

abgestrahlte Dipolleistung

Ohne Quantisierung fortlaufende Energieabstrahlung!

Bohr: $$E_n = \frac{e^2}{a_B}\frac{1}{2n^2} = \frac{\hbar\omega_{at}}{2n^2}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$E_{ar} = \hbar \omega_{ar} = \frac{e^2}{a_B} = \alpha^2 mc^2$$

$$\cong 27{,}2\,eV$$

Ein angeregter Zustand (mit Elektronenbahn $n \geq 2$) geht durch Abstrahlung eines Photons in einen niederen Zustand über. Dafür „benötigt" er die Zeit

$$\tau \sim \frac{E_{ar}}{P} \approx \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{\omega_{ar}}$$

Lebensdauer

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{-3} \approx 10^6 \\ \omega_{ar} \approx 4 \cdot 10^{16}\,Hz \end{array}\right\} \quad \tau \sim 10^{10}\,sec$$

QM-Rechnung $\hbar \omega_{mn} \sim 2 \ldots 3\,eV$

$\tau \sim 10^{-8}\,s$

$$\frac{\omega_0}{\gamma} \approx \frac{\omega_{ar}}{\gamma_{str}} = \frac{3}{2\alpha^3}$$

$$\left(\frac{e^2}{a_B}\right) / mc^2 = \alpha^2$$

$$\sigma_{R} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2/a_B}{mc^2}\right)^2 a_B^2 \left(\frac{3}{2\alpha^3}\right)^2$$

$$= \frac{6\pi}{\alpha^2} a_B^2 = \pi R_0^2$$

$$R_0 \cong 3 \cdot 10^2\, a_B$$

$10^5 \times$ größer als WQ des Atoms