d) Zirkularbewegung; Synchrotronstrahlung

Ganz anders ist das bei der Zirkularbewegung. Die totale Strahlungsleistung ist

$$P = \frac{2e^2}{3c}\gamma^4|\dot{\vec{\beta}}|^2$$

Für eine Kreisbewegung mit Radius ρ und Kreisfrequenz ω kann man das auch schreiben als

$$P = \frac{2e^2}{3c}\frac{v^2}{\rho^2}\beta^2\gamma^4 = \frac{2e^2}{3}\frac{c}{\rho^2}\beta^4\gamma^4$$

$$= \frac{2e^2}{3c}\omega^2\beta^2\gamma^4 \sim \gamma^4$$

Der Faktor γ^4 besagt, daß hier enorme Strahlungsverluste auftreten. Dies ist bei zirkularen Elektronbeschleunigern wie LEP der Fall. Der Strahlungsverlust pro Umlauf ist

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta}P = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\rho}\beta^3\gamma^4$$

Für $\beta \cong 1$ ist dies für Elektronen und Positronen

$$\delta E\,(\mathrm{MeV}) = 8.85\,10^{-2}\,\frac{[E\,(\mathrm{GeV})]^4}{\rho\,(\mathrm{Meter})}$$

Der zugehörige Strom (für Teilchen) ist

$$I = e\,\frac{1}{2\pi\rho/c\beta} = \frac{e\beta c}{2\pi\rho}$$

also $P = \frac{I}{e}\, \delta E$

In Zahlen

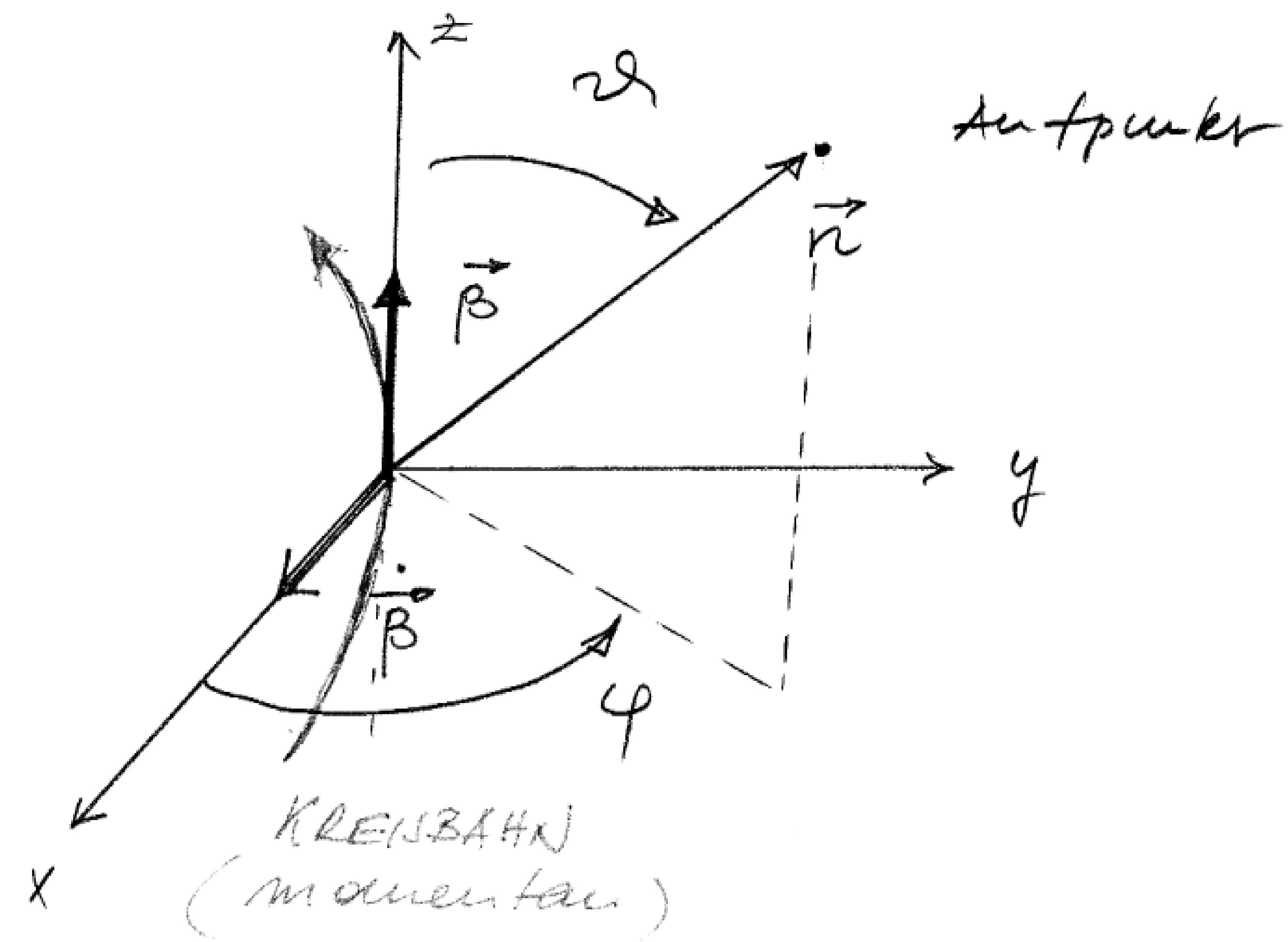
$$P(\text{Watt}) = 10^6\, \delta E(\text{MeV})\; I(\text{Amp})$$

LEP: $\rho = 4{,}3$ km , $E = 100$ GeV

$$\delta E = 8{,}85\, 10^{-2}\, \frac{(100)^4}{4{,}3\, 10^3} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

$$P = 10^6\, 2 \cdot 10^3 \cdot I(\text{Amp})$$

Winkelverteilung



Wähle momentane Orientierung von $\vec{\beta}$ in z-Richtung und $\dot{\vec{\beta}}$ in x-Richtung d.h. Kreisbahn in der x-z-Ebene.
Polarkoordinaten für Beobachtungspunkt (ϑ, φ)

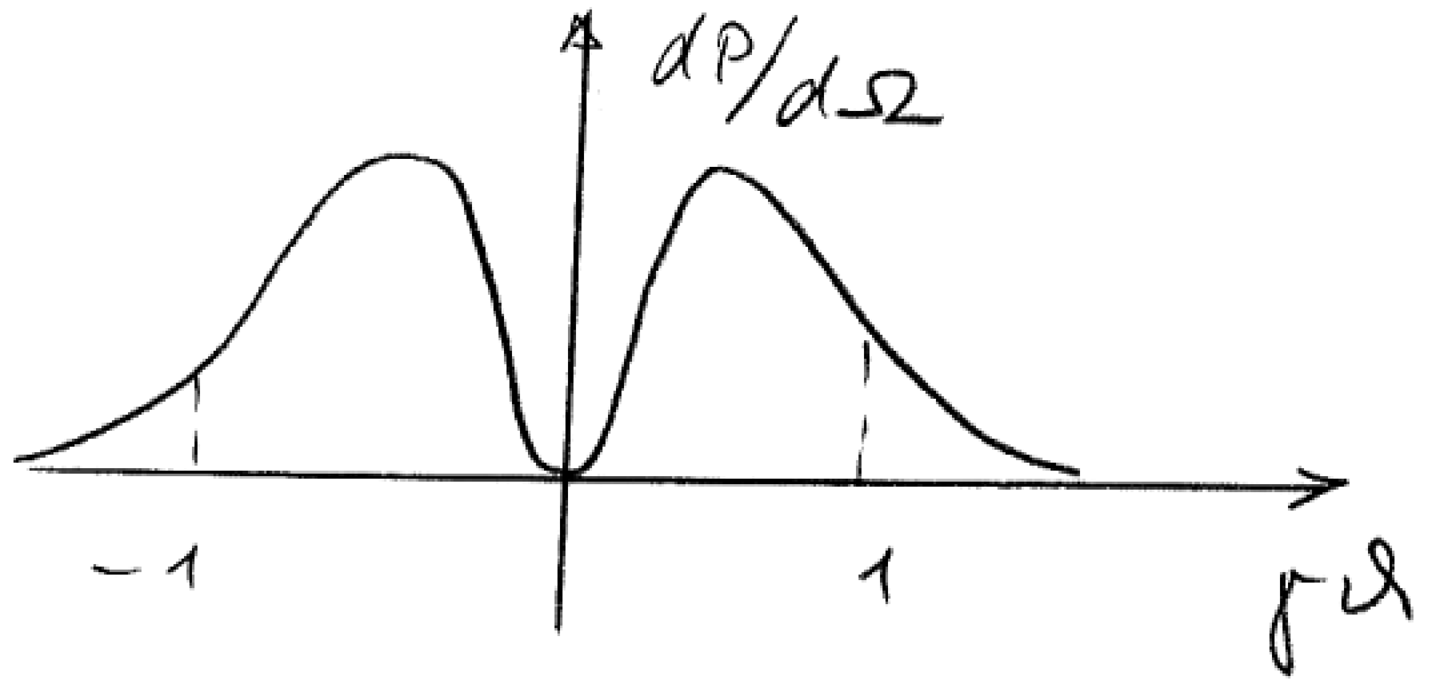
Aus der allgemeinen Formel findet man (nach ein wenig Algebra)

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \frac{1}{(1-\beta\cos\vartheta)^3}\left[1 - \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\cos\vartheta)^2}\right]}$$

→ siehe Illustration folgende Seite

Für $v \nearrow c$ erhält man wieder eine charakteristische Vorwärtsspitze. Für kleine Winkel ϑ gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{2e^2}{\pi c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \frac{1}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^3}\left[1 - \frac{4\gamma^2\vartheta^2\cos^2\varphi}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^2}\right]$$



Diese Strahlung wird auch als Synchrotron-strahlung bezeichnet. Man beobachtet sie nicht nur bei zirkular beschleunigten sondern auch in heissen Plasmen (z.B. dem Krebsnebel und Fusionsreaktoren)

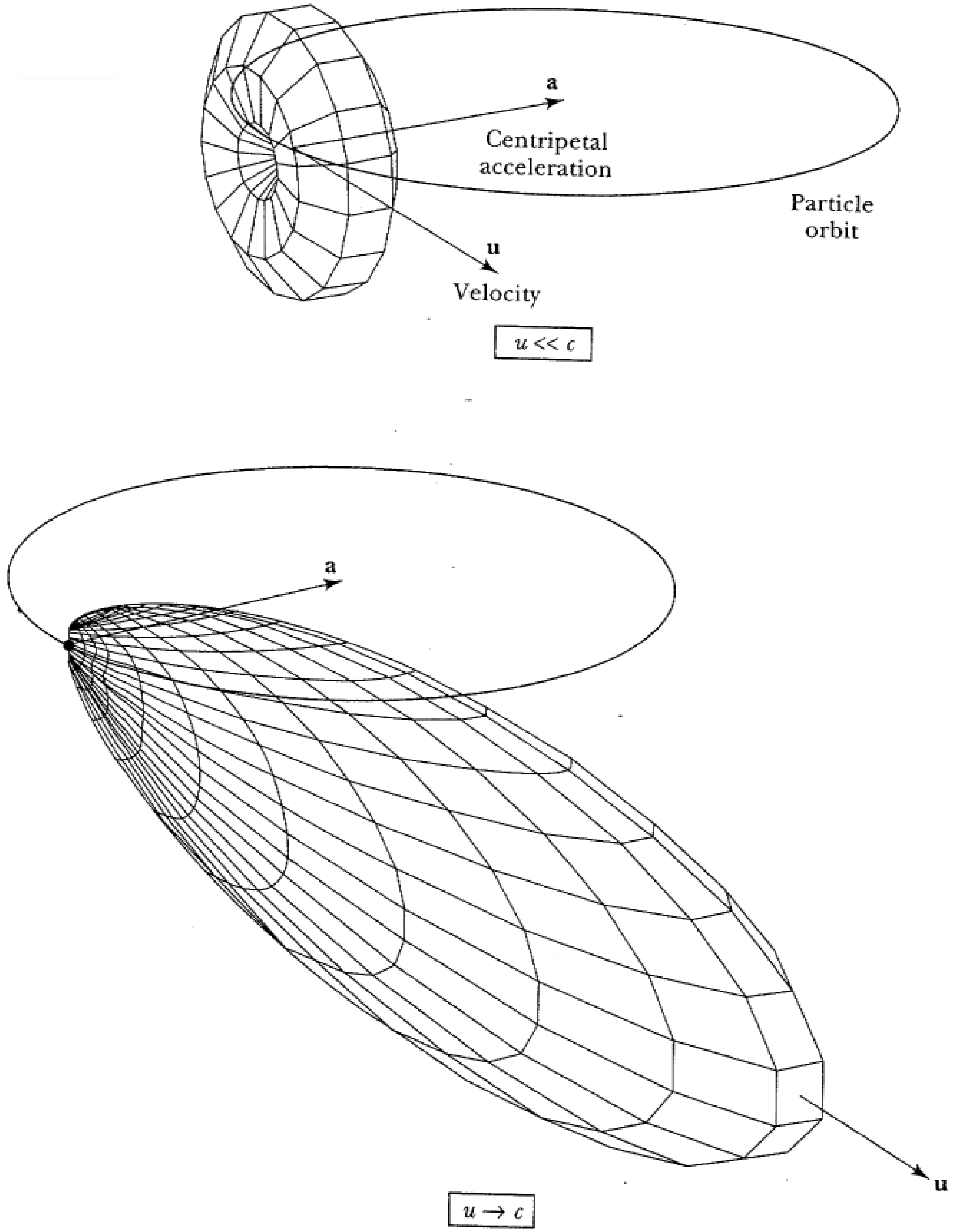


FIGURE 8-8. Radiation pattern of a charge in a circular orbit: nonrelativistic and relativistic cases.

machines (betatrons, cyclotrons, synchrotrons). In a linear machine the only acceleration is that associated with the particle's increase of speed; once the particle becomes relativistic ($u \approx c$), there is little radiation as further sections of the accelerator continue to increase the particle's energy. In circular machines, there is a continuous centripetal acceleration, and its associated radiation becomes dominant as $u \rightarrow c$. For a relativistic particle in a circular orbit of radius ρ, the centripetal acceleration approaches

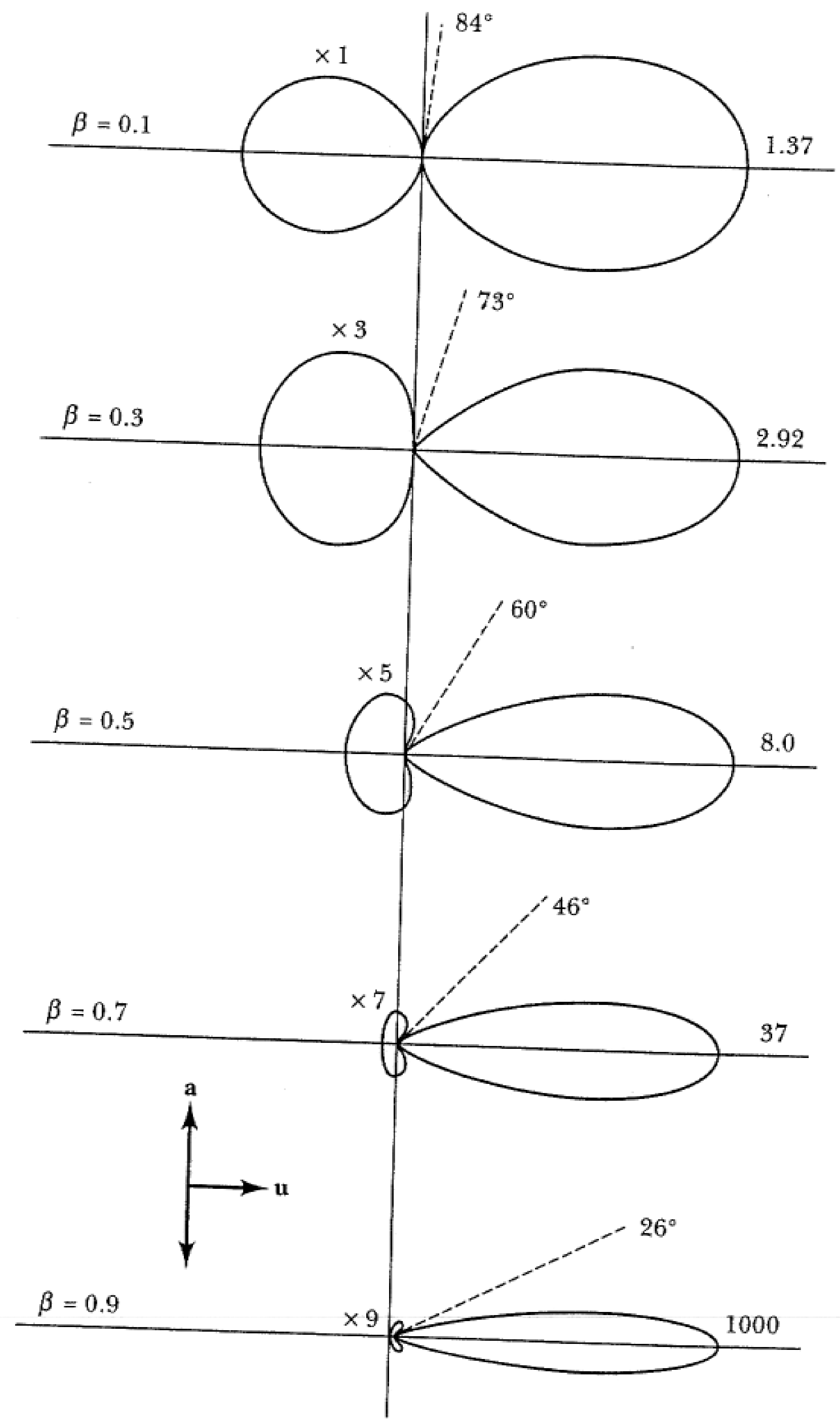


FIGURE 8-9. Angular dependence of synchrotron radiation in plane of orbit (velocity is to the right; acceleration is up or down).