7. Wellenausstrahlung

Zeitabhängige Quellen, z.B. beschleunigte Punktladungen, erzeugen elektromagnetische Wellen. Dieses Kapitel behandelt die Eigenschaften dieser ausgestrahlten elektrom. Wellen.

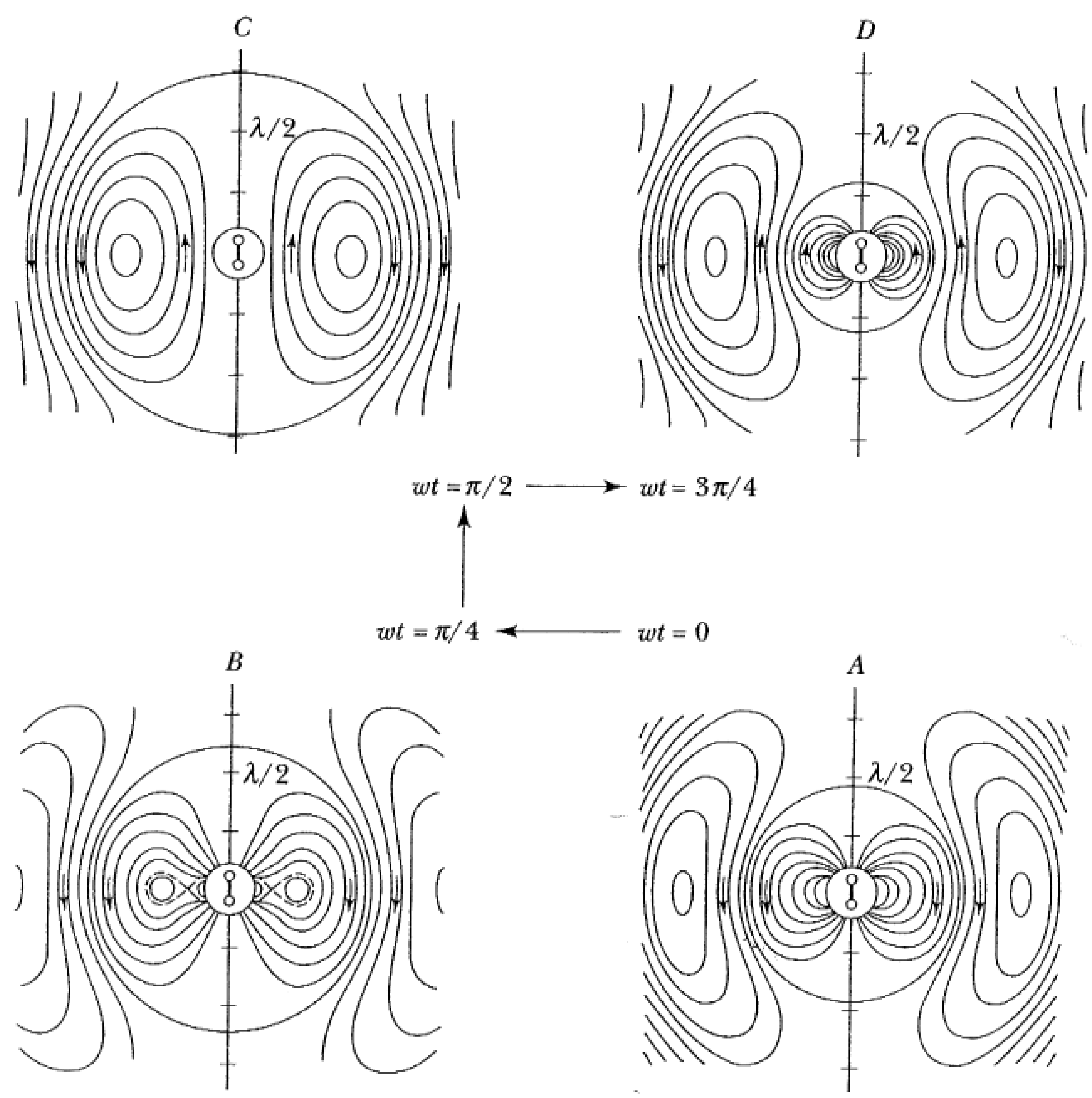


FIGURE 9-6. Snapshots of oscillating dipole. [From Hertz, *Wiedemann's Ann.* **36**, 1 (1889); reprinted in (He62).]

Elektrische Feldlinien eines oszillierenden elektrischen Dipols. Aus Wiedemann's Ann. <u>36</u>, 1 (1889)

7.1 Inhomogene Wellengleichung

Aus den homogenen Wellengleichungen lassen sich das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ einführen

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$
$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lauten

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Wir haben in Kapitel 6 die Lösungen dieser Gleichungen für statische Quellen studiert. Aus Kapitel 4 kennen wir allgem. die Lösung für freie Wellen $(\rho, \vec{j} = 0)$. Hier verbleibt uns noch die Aufgabe eine spezielle Lösung für eine zeitlich veränderliche Ladungs- und Stromverteilung zu suchen.

In Kapitel 2.3.3 haben wir gezeigt, daß in Lorenzeichung

$$\frac{1}{c}\partial_t \varphi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

aus den inhomogenen Maxwellgln folgt

$$\Box \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

7.2. Retardierte Potentiale

Die allgemeine Problemstellung besteht darin, Wellengleichungen der Form

$$-\Box \, \chi(\vec{x},t) = i(\vec{x},t) \qquad (*)$$

zu lösen. Wir suchen eine spezielle Lösung.

Fouriertransformation

$$\hat{\chi}(\vec{x},\omega) = \int dt \, e^{+i\omega t} \chi(\vec{x},t) \underset{\text{(Notation)}}{=} \chi^{\omega}(\vec{x})$$

$$\chi(\vec{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\vec{x},\omega)$$

Dann folgt aus $(*)$

$$\Big(\underbrace{-\left(\tfrac{\omega}{c}\right)^2}_{=:\gamma_0^2} - \Delta\Big) \chi^{\omega}(\vec{x}) = i^{\omega}(\vec{x})$$

Wir definieren

$$\gamma_0 := \pm i \frac{\omega}{c}$$

$$\gamma_{\pm} := \pm i \frac{\omega}{c} + \varepsilon \,, \qquad \varepsilon > 0$$

und betrachten die Gleichung

$$(\gamma_{\pm}^2 - \Delta) \chi^{\omega}(\vec{x}) = i^{\omega}(\vec{x})$$

Dies ist eine Helmholtz-Gleichung

Aus dem Anhang zu Kapitel 4 (Fourier-trafo) wissen wir die Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$\varphi^{\omega}_{\pm}(\vec{x}) = \int d^3y \, \frac{e^{-\gamma_\pm |\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \, i^{\omega}(\vec{y})$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{=} \int d^3y \, \frac{e^{\mp i \frac{\omega}{c} |\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \, i^{\omega}(\vec{y})$$

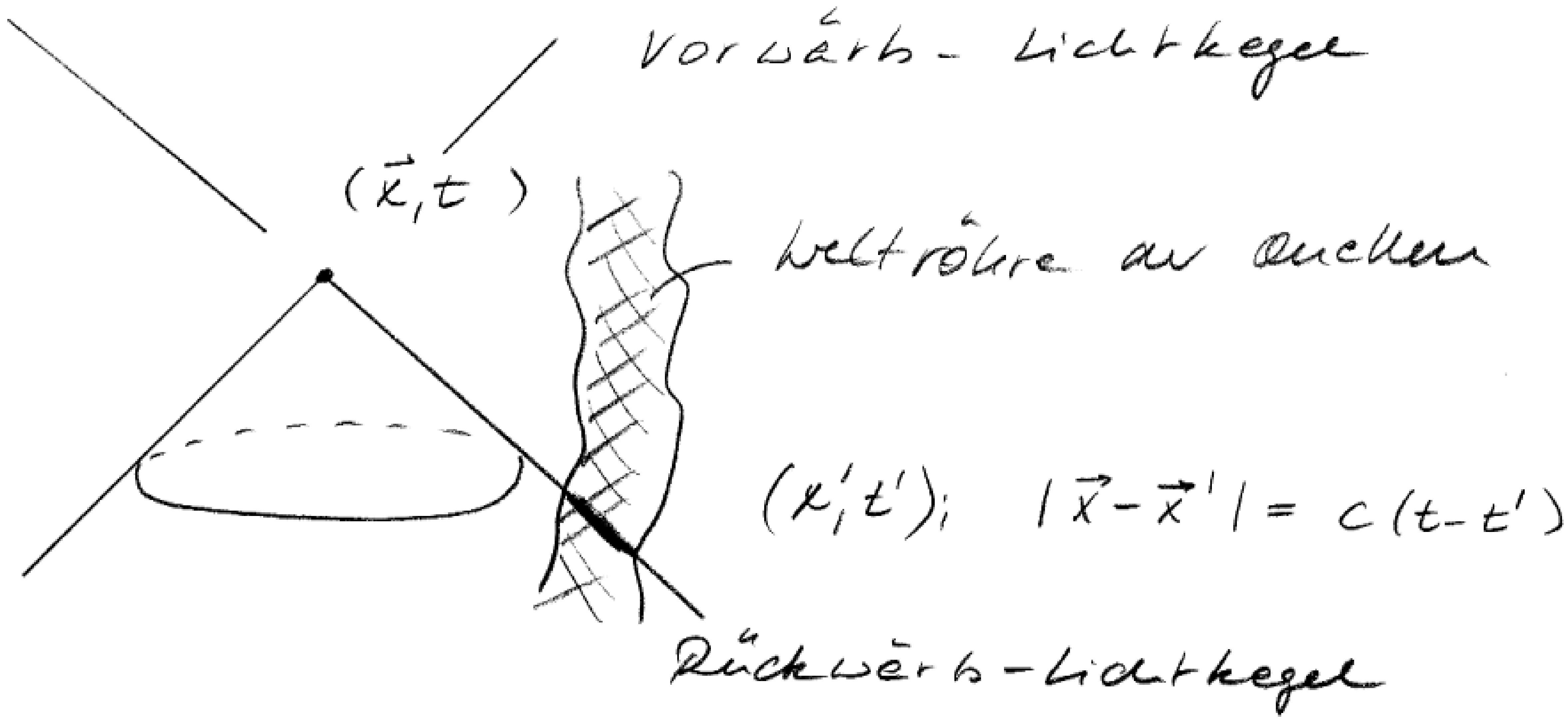
Dann folgt durch Fourier-Rücktrafo

$$\varphi_{\pm}(\vec{x},t) = \int d^3y \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \, e^{-i\omega\left(t \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)} \, i^{\omega}(\vec{y})$$

$$= \int d^3y \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \, i\left(\vec{y}, t \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)$$

$\varphi_{\pm}(\vec{x},t)$ sind spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung (*)

Für $c \to \infty$ reduziert sich der Ausdruck auf das bereits bekannte Poissonintegral für statische Potentiale; in diesem Fall reduziert sich auch die Wellengl. auf die Poissongl.



$\varphi_-(\vec{x},t)$ = Superposition von Coulombpotentialen über $\vec{x}' = \vec{y}$, wobei der Wert der Quelle zur Zeit $t_- = t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}$ genommen wird.

→ retardierte Potentiale

bestimmen die Lösung der inhomogenen Wellengleichung am Raum-Zeit Punkt $(\vec{x},t)$ durch die Quellen auf dem Rückwärtslichtkegel: $i(\vec{y}, t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|)$.

$\varphi_+(\vec{x},t)$ = avancierte Potentiale

bestimmt Potential bei $(\vec{x},t)$ aus Wert der Quellen auf dem Vorwärtskegel.

7.3. Nahzone und Fernzone

Wir leiten zunächst die inhomogenen Wellengleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder her

(i) Ampere-Maxwell Gesetz

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}}_{\mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}}_{=0} - \Delta\vec{B}} = \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{\substack{= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} \\ \text{Faraday'sche} \\ \text{Induktionsgesetz}}} + \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c}\partial_t^2\right)\vec{B} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{j}}$$

(ii)

$$\mathrm{rot}\,(\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{\substack{= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} \\ \text{Faraday}}}) = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{\substack{=4\pi\rho \\ \text{Coulomb}}} - \Delta E$$

$$= -\frac{1}{c}\partial_t\,\mathrm{rot}\,\vec{B} \overset{\text{Ampere}}{\underset{\text{Maxwell}}{=}} -\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\right)$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = 4\pi\left(\nabla\rho + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{j}\right)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun gemäß der allgemeinen Überlegungen in den vorangegangenen Kapiteln die retardierten elektromagnetischen Felder ableiten.

$$\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = -\int d^3y \, \frac{[\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{j}\,]_{ret}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{B}_{ret}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3y \, \frac{[\,\mathrm{rot}\,\vec{j}\,]_{ret}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und rot auf $\vec{y}$ wirken und $[\;]_{ret}$ andeuten soll, daß das Argument der Funktionen in Klammern $(\vec{y}, t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|)$ lautet.

Beachte, daß $[\vec{\nabla}\rho]_{ret} \neq \vec{\nabla}[\rho]_{ret}$

$$\vec{\nabla}[\rho]_{ret} = \vec{\nabla}\rho(\vec{y}, t - \tfrac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|)$$

$$= [\vec{\nabla}\rho]_{ret} - [\partial_t \rho]_{ret} \underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}_{= -\frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}}$$

d.h. $[\vec{\nabla}\rho]_{ret} = \vec{\nabla}[\rho]_{ret} - \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{1}{c}[\partial_t \rho]_{ret}$

Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\left\{ -\vec{\nabla}[\rho]_{ret} + \frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}[\partial_t \rho]_{ret} - \frac{1}{c^2}[\partial_t \vec{j}\,]_{ret} \right\}$$

oder, nach einer partiellen Integration im 1. Term

$$\boxed{\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = \int d^3y \left\{ \underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}[\rho]_{ret}}_{\text{RETARDIERTES COULOMBFELD}} + \underbrace{\left(\frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}[\partial_t \rho]_{ret} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}[\partial_t \vec{j}\,]_{ret} \right)}_{\text{STRAHLUNGSTERME} \sim \frac{1}{r}\ (= 0 \text{ im stationären Fall})} \right\}}$$