6. Statische Felder

Für statische Felder reduzieren sich die Maxwell Gleichungen auf zwei unabhängige Sätze von Gleichungen für elektrische und magnetische Phänomene

<u>Elektrostatik</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned}}$$

<u>Magnetostatik</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}}$$

Aufgrund von $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ läßt sich die Elektrostatik durch die Einführung eines skalaren Potentials

$$\varphi = - \vec{\nabla} \vec{E}$$

auf die <u>skalare Poissongleichung</u> reduzieren

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})}$$

Aufgrund von $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ läßt sich die Magnetostatik durch Einführung eines Vektorpotentials

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

in Coulombeichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, auf die <u>vektorielle Poissongleichung</u> reduzieren*)

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

---

*) Nebenrechnung

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$$

Wir kennen bereits spezielle Lösungen der skalaren und vektoriellen Poissongleichung

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_p(\vec{x}) &= \int d^3y \, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \vec{A}_p(\vec{x}) &= \int d^3y \, \frac{1}{c} \, \frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned}}$$

Man bezeichnet diese partikulären Lösungen auch als Poisson-Formeln. Sie geben die skalaren und vektoriellen Volumenpotentiale zu vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen an, mit der Eigenschaft, daß φ_p und $\vec{A}_p$ im Unendlichen verschwinden.*)

Man bezeichnet $G^0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$ als die freie Greensche Funktion der Poisson-Gleichung. Als Distribution aufgefasst ist $G^0(\vec{x})$ bis auf eine Normierung eine Fundamentallösung des Laplace-Operators:

$$\Delta G^0(\vec{x}) = -4\pi \, \delta(\vec{x})$$

Falls die Inhomogenität der Poissongleichung gleich Null ist ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$), so reduziert sie sich auf die Laplace Gleichung

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{x}) = 0}$$

deren Lösungen als harmonische Funktionen bezeichnet werden.

---

*) Bemerkung: Die durch die Poisson-Formel gegebene Lösung der Poissongleichung verhält sich im Unendlichen wie $\mathcal{O}(1/|\vec{x}|)$. Durch diese Randbed. wird sie auch eindeutig bestimmt, da die Differenz von zwei Lösungen eine harmonische Fkt in $\mathbb{R}^3$ ist ($\Delta\psi = 0$) mit $\psi(x \to \infty) = 0$. Eine solche Funktion (siehe 6.1) ist identisch Null.

6.1 Potentialtheorie

a) Allgemeine Theoreme

<u>Mittelwertformel</u>: Der Wert des Potentials φ im Zentrum $\vec{x}$ einer Kugel $K_R(\vec{x})$ mit Radius R läßt sich als Mittelwert des Potentials über die Kugeloberfläche schreiben

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(\vec{x})} \varphi(\vec{y})\, df(\vec{y})}$$

<u>Beweis</u>: Zum Beweis verwenden wir die 2. Greensche Formel für $K_R(\vec{x})$

$$\int_{\partial K_R} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) df = \int_{K_R} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\, dV \quad (*)$$

φ sei eine harmonische Funktion: $\Delta \varphi = 0$.

Setze zunächst $\psi = 1$. Dann folgt aus $(*)$

$$(1) \quad \int_{\partial K_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, df = 0 \quad \text{für jede harm. Fkt.}$$

Wähle nun $\psi = G(\vec{y},\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}$ $\quad (\Delta_y G = -4\pi\delta(\vec{x}))$

Dann folgt aus $(*)$ und (1)

$$(2) \quad \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, df$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi(\vec{y}) \frac{(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{n}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3}\, df(\vec{y})$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R} \varphi(\vec{y})\, df(\vec{y})$$

Folgerungen:

(a) Ist φ eine harmonische Funktion im ganzen Raum und $\lim_{|x| \to \infty} \varphi(\vec{x}) = 0$, dann

verschwindet φ identisch, $\varphi \equiv 0$. (Um jeden Punkt im Raum lässt sich eine Kugel legen, deren Radius dann gegen ∞ strebt)

(b) Falls $\varphi(\vec{y}) > \varphi(\vec{x})$ auf irgendeinen Teil der Kugeloberfläche, dann muß $\varphi(\vec{y}) < \varphi(\vec{x})$ auf einen anderen Teil der Kugeloberfläche sein. Folglich kann das Potential $\varphi(\vec{x})$ in einem Gebiet, in dem sich keine Ladungen befinden, weder ein Maximum noch ein Minimum haben. Insbesondere gilt φ = konstant in ladungsfreien ~~Zonen~~, die von einer Äquipotentialfläche berandet sind

(c) Earnshaw Theorem: Eine statische Anordnung von frei beweglichen Ladungen ist instabil, oder bestenfalls metastabil, da sich keine der Ladungen in einem lokalen Minimum der potentiellen Energie der anderen Ladungen befinden kann (nach b).

$\curvearrowright$ Instabilität klassischer Materie, die durch elektrostatische Kräfte miteinander wechselwirken.

Eindeutigkeitssatz: Eine im Gebiet G harmon. Funktion φ ist eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt, wenn kanonische Randbedingungen vorliegen, d.h. $\varphi(\vec{y})$ oder $\vec{n}\cdot \operatorname{grad}\varphi(\vec{y})$ auf dem Rand ∂G von G vorgegeben sind.

Beweis: Seien φ_1 und φ_2 harmonische Fkt'n mit identischen Randbedingungen. Dann ist $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$ eine harmonische Funktion mit den Randbedingungen $\psi(\vec{y}) = 0$ oder $\partial_n \psi(\vec{y}) = 0$ d.h. $\psi(\vec{y})\,\partial_n \psi(\vec{y}) = 0$. Folglich gilt

$$0 = \oint_{\partial G} \psi \vec{\nabla}\psi \; \vec{n}\, df \underset{\text{Gauß}}{=} \int_G \vec{\nabla}(\psi \vec{\nabla}\psi)\, dV =$$

$$= \int_G \Big((\vec{\nabla}\psi)^2 + \psi \underbrace{\Delta\psi}_{\equiv 0} \Big) dV = \int_G (\vec{\nabla}\psi)^2 dV$$

und somit muß $\vec{\nabla}\psi \equiv 0$ auf G sein $\Rightarrow$ $\psi \equiv$ konstant auf G.

Folgerung: Die kanonischen Randbedingungen legen auch die Lösung der Poissongleichung eindeutig*) fest. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_p(\vec{x}) + \psi(\vec{x})$$

wobei $\varphi_p(\vec{x})$ durch die Poisson-Formel gegeben ist und $\psi(\vec{x})$ eine harmonische Funktion mit kanonischen RB'n ist.

Beweis: $\Delta\varphi_{1/2} = -4\pi\rho$ mit kanon. Randbed.
Dann $\tilde{\psi}(x) := \varphi_1(\vec{x}) - \varphi_2(\vec{x})$ eine harmonische Funktion $\Delta\tilde{\psi} = 0$ mit kanon. RB'n der Form $\tilde{\psi}\,\partial_n\tilde{\psi} = 0$.
$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \tilde{\psi} \equiv$ constant

---

*) bis auf Konstante

Da die Lösung eindeutig ist muß man nur noch eine Lösung finden

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_p(\vec{x}) + \psi(\vec{x}) \quad , \quad \Delta\psi = 0$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho + 0$$

- $\varphi(\vec{x})|_{\partial G} = \varphi_p(\vec{x})|_{\partial G} + \psi(\vec{x})|_{\partial G}$

  $\psi(\vec{x})|_{\partial G} = (\varphi - \varphi_p)_{\partial G}$

- analog für $\partial_n \varphi$

b) Greensche Funktionen und Randwertaufgaben der Elektrostatik

Wir schreiben zunächst die Poissongleichung in eine Integralgleichung um. Dazu verwenden wir die 2. Greensche Identität

$$\int_V \left(\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi\right) dV = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) df$$

und wählen für φ eine Lösung der Poissongleichung, $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, und für ψ die freie Greensche Funktion, $G^0(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$. Dann folgt

$$-\int_V \left(\varphi\, 4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, 4\pi\rho(\vec{y})\right) d^3y =$$

$$= \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\partial}{\partial n_y} \varphi\right) df_y$$

oder

$$(*)\quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} - \varphi \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right] df_y$$

d.h. also die Ladungsdichte im Volumen V und $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\varphi$ bzw. φ auf ∂V bestimmen das Potential $\varphi(\vec{x})$ in V. Vorhandene Ladungen außerhalb V gehen nur implizit über die Oberflächenintegrale ein. Ist V ladungsfrei, dann ist φ vollständig durch seine Werte und Normalableitung auf ∂V bestimmt. Diese überraschende

Feststellung besagt, daß (*) keine Lösung eines Randwertproblems sein kann, sondern nur eine Integralbeziehung für φ, da die willkürliche Festlegung von sowohl φ wie auch $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (Cauchy Randbedingungen) eine Überbestimmung des Problems darstellt; siehe Eindeutigkeitssatz.

Anstatt der freien Greenschen Funktion G^0 setzen wir nun die Greensche Funktion

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} + h(\vec{x},\vec{y}) \quad , \quad \Delta h = 0$$

in die 2. Greensche Identität ein. Da auch $G(\vec{x},\vec{y})$ die Poissongleichung für eine Punktladung löst, $\Delta G = -4\pi\delta$, folgt analog zu obiger Rechnung

$$(*)_C \quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G(\vec{x},\vec{y}) \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial n_y} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n_y} \right] df_y$$

Wir diskutieren nun die Fälle von Dirichlet und von Neumann Randbedingungen getrennt weiter

Dirichlet Randbedingungen

Die Freiheit in der Wahl der Greenschen Funktion G (h ist eine beliebige harmonische Funktion) kann man verwenden, um die Integraldarstellung der Poissongleichung zu vereinfachen.

Bei Dirichlet Randbedingungen wählen wir für G spezielle D-RB:

$$G(\vec{x},\vec{y}) = 0$$

Dann folgt

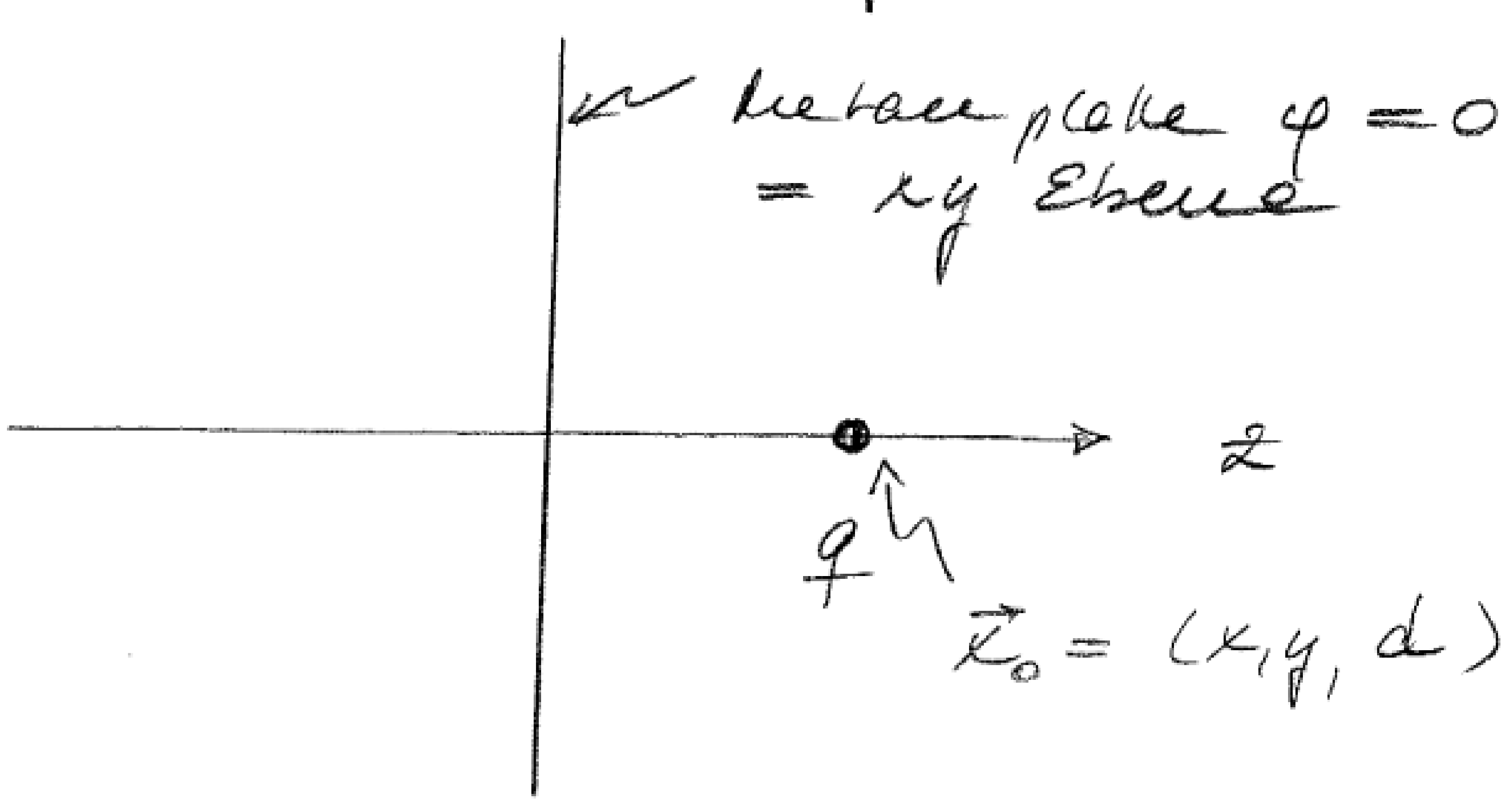
$$(*)_D \quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{y}) G(\vec{x},\vec{y}) d^3y - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial n_y} df_y$$

als vollständige Lösung des D-RB der Poisson-Gleichung. Man hat die Lösung der Poissongleichung für eine allgemeine Ladungsverteilung damit reduziert auf die Lösung für eine Punktladung. Kennt man die Lösung für eine Punktladung, die Greensche Funktion G, so findet man die allgemeine Lösung durch Integration $(*)_D$

Beispiele

(a) Ladungsverteilung vor einer unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatte ↷

Betrachte Punktladung vor Metallplatte



$$\varphi(x, y, z = 0) = 0$$

$$\varphi \to 0 \quad \text{für} \quad x, y \to \pm\infty$$

Wir suchen

$$G = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} + h(\vec{x},\vec{x}_0)$$

wobei $h(\vec{x},\vec{x}_0)$ eine harmonische Funktion im rechten Halbraum ($z>0$) ist, so daß $G(x,y,z=0) = 0$.

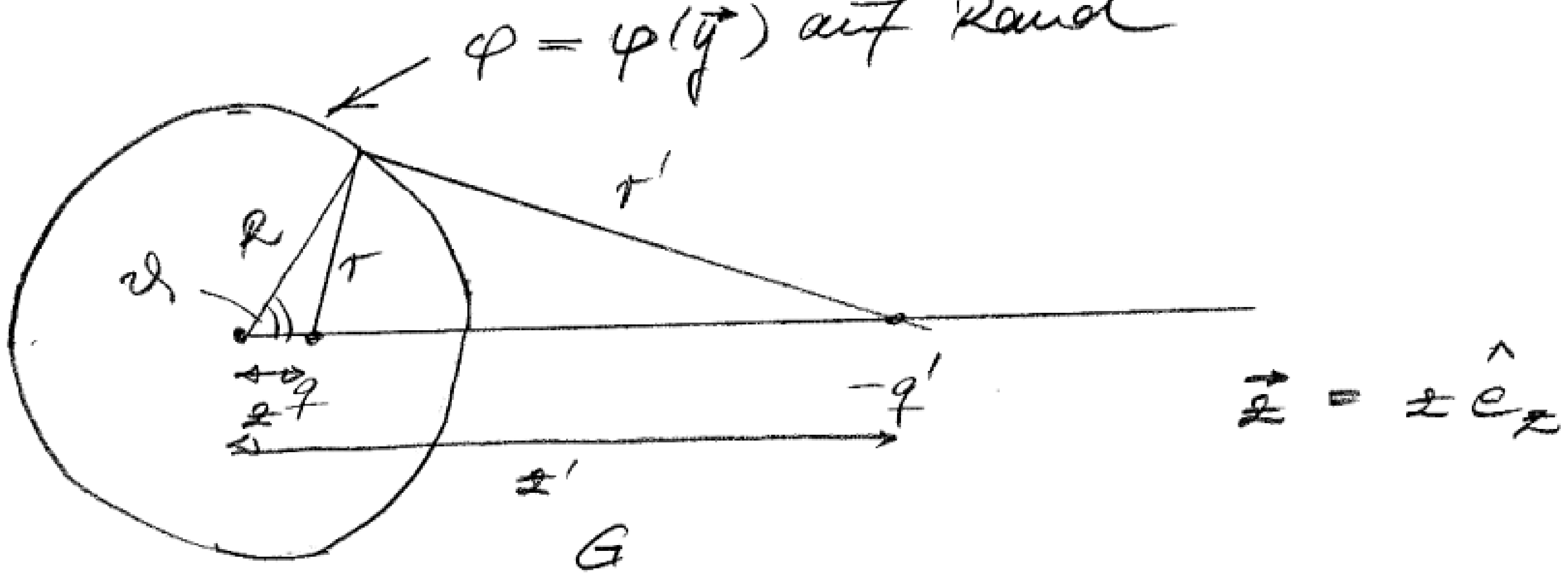
<u>Lösung</u>: Da h Lösung der Poissongleichung im rechten Halbraum sein soll, kann man versuchen h aus Ladungsverteilungen im linken Halbraum so zu bestimmen, daß die Randbed. erfüllt ist. Diese Methode heißt Spiegelladungsmethode.

Für den vorliegenden Fall wählt man $h(\vec{x},\vec{x}_0)$ als das Potential der Spiegelladung ($-q=-1$) bei $\vec{x}_0' = -\vec{x}_0$. Dann gilt offensichtlich $\Delta h = 0$ für $z>0$. Somit folgt:

$$G = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x}+\vec{x}_0|}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{y}) \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x}+\vec{x}_0|} \right) d^3y$$

(b) Ladungsverteilung innerhalb einer geerdeten Kugel K mit Radius R



Das Potential G auf der Kugeloberfläche ist dann Null, wenn

$$\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$$

gilt. Aus der Skizze entnimmt man

$$r^2 = (\vec{z} - \vec{x})^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta$$
$$r'^2 = (\vec{z}' - \vec{x})^2 = z'^2 + R^2 - 2z'R\cos\vartheta$$
$$\rightsquigarrow \quad \frac{q^2}{q'^2} \overset{!}{=} \frac{r^2}{r'^2} = \frac{z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}{z'^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta}$$

Diese Bedingung ist offenbar dann für alle ϑ erfüllt, wenn

$$R^2 = zz'$$
$$\frac{q^2}{q'^2} = \frac{z^2 + zz' - 2zR\cos\vartheta}{z'^2 + zz' - 2z'R\cos\vartheta} = \frac{z}{z'}\,\frac{z + z' - 2R\cos\vartheta}{z' + z - 2R\cos\vartheta}$$
$$= \frac{z}{z'} \quad \rightsquigarrow \quad q'^2 = q^2\,\frac{z'}{z} = q^2\,\frac{R^2}{z^2}$$

Folglich lautet die gesuchte Greensche Funktion

$$G(\vec{x},\vec{z}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|} - \frac{R/z}{|\vec{x} - \vec{z}'|} \quad ; \quad \vec{z}' = \vec{z}\cdot\left(\frac{R}{z}\right)^2$$

Sie erfüllt die Randbedingung $G = 0$ auf der Kugeloberfläche.

Nun gilt auf dem Rand ∂K der Kugel

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x},\vec{y}) = \underbrace{\frac{\vec{y}}{R}}_{\hat{n}_y} \vec{\nabla}_y G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{R} \frac{\vec{x}^2 - R^2}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

so daß die Lösung des D-RB lautet

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x},\vec{y})\,\rho(\vec{y})\,d^3y + \frac{R^2 - \vec{x}^2}{4\pi R} \int_{|\vec{y}|=a} \frac{\varphi(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\,df_y}$$

Aus dieser Beziehung kann man auch wieder die Mittelwertformel für harmonische Funktionen erhalten:

$$\rho = 0, \quad \vec{x} = 0$$

$$\varphi(0) = \underbrace{\frac{R^2}{4\pi R^4}}_{=\frac{1}{4\pi R^2}} \int_{|\vec{y}|=a} \varphi(\vec{y})\,df_y$$

von Neumann Randbedingungen

Naheliegend $\frac{\partial G}{\partial n_y}(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad \forall \; \vec{y} \in \partial V$

Jedoch $\underbrace{\int_V \nabla_y^2 G(\vec{x},\vec{y})\, d^3y}_{\displaystyle \int_V \vec{\nabla}_y (\vec{\nabla}_y G)\, d^3y} = -4\pi \int \delta(\vec{x}-\vec{y})\, d^3y$

$= -4\pi$

$$\int_V \vec{\nabla}_y (\vec{\nabla}_y G)\, d^3y \underset{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} \vec{\nabla}_y G \, d\vec{f}_y$$

$$= \oint_{\partial V} \underbrace{\vec{\nabla}_y G \cdot \vec{n}_y}_{\frac{\partial G}{\partial n_y}} \, df_y$$

also $-4\pi = \oint \frac{\partial G}{\partial n_y} df_y$ und folglich kann man nicht $\frac{\partial G}{\partial n_y} = 0$ wählen.

Wähle $\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{4\pi}{|\partial V|}$; $|\partial V|$ = Fläche der Oberfläche von V

für $\vec{y} \in \partial V$

Dann

$$\varphi(\vec{x}) = \langle \varphi \rangle_{\partial V} + \int_V \rho(\vec{y})\, G(\vec{x},\vec{y})\, d^3y + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G \frac{\partial \phi}{\partial n_y} df_y$$

wobei $\langle \varphi \rangle$ der Mittelwert des Potentials über den Rand ∂V des Gebiets V ist.

6.2. Lösungsmethoden für Randwertprobleme

a) Funktionentheorie

Falls sich bei einem Randwertproblem alle Größen in einer Raumrichtung sehr viel langsamer ändern als in den beiden dazu senkrechten Richtungen, dann kann man in guter Näherung das ebene Problem lösen. Die Laplace Gleichung lautet dann

$$\boxed{\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0}$$

Derartige Probleme lassen sich besonders einfach mit der Funktionentheorie behandeln.

Sei $f(z)$ mit $z = x+iy$ eine analytische Funktion. Zerlegt man f in Real- und Imaginärteil

$$f(z=x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

so gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

und folglich sind sowohl φ wie ψ harmonische Funktionen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \;; \text{ analog für } \psi .$$

Man kann daher $\varphi(x,y)$ als die Potentialfunktion eines elektrostatischen Problems ansehen, sofern nur die analytische Fkt. $f(z)$ so geschickt gewählt ist.

Aus den Cauchy-Riemann Dgl'n folgt weiterhin, daß

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$$

ist, d.h. die Äquipotentiallinien von φ und ψ stehen $\perp$ aufeinander (und damit natürlich auch die Feldlinien).

<u>Beispiel</u>: Wir betrachten die Funktion $f(z) = z^2$. Aus

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

ergibt sich

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad \psi = 2xy .$$

Für φ = constant erhält man das elektrische Feld einer geladenen metallischen Kante $\to$ (a)

Für ψ = constant erhält man das Feld einer sog. Quadrupollinse $\to$ (b)

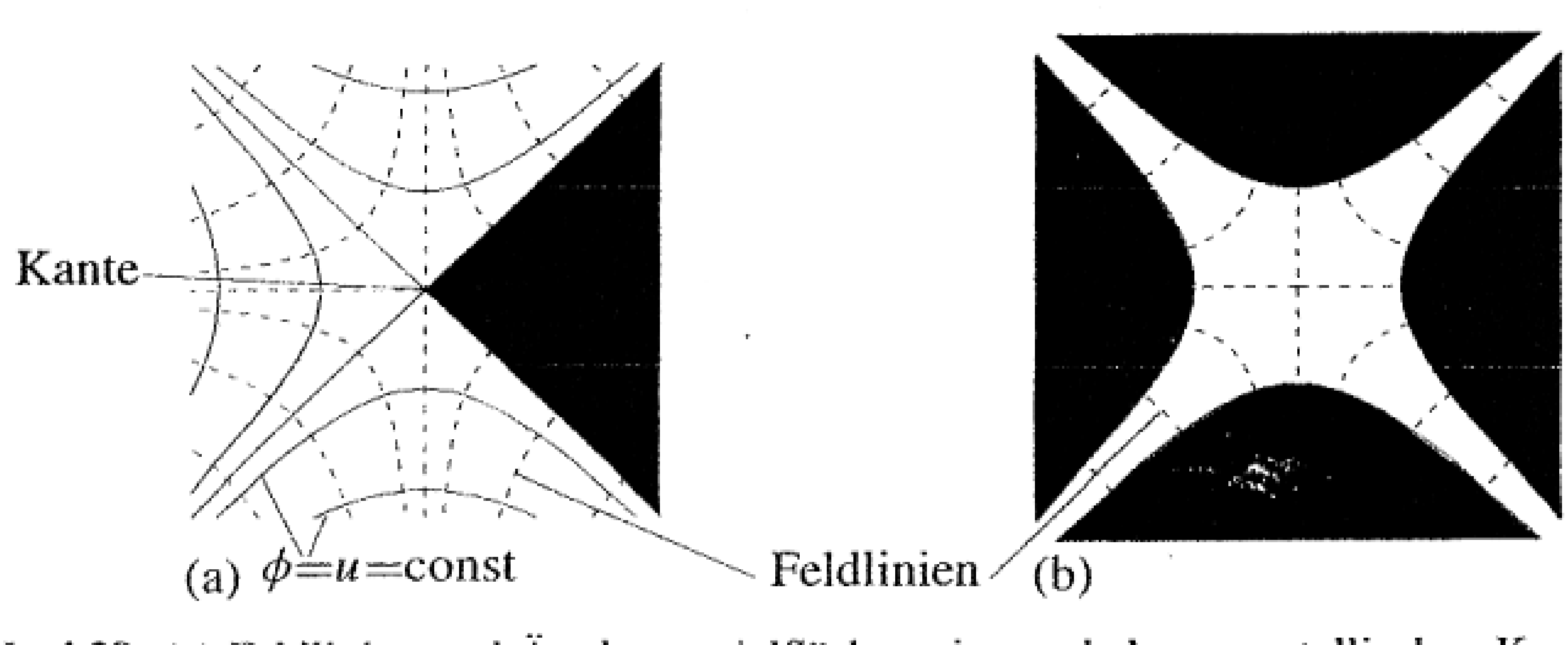


Abb. 4.29: (a) Feldlinien und Äquipotenzialflächen einer geladenen metallischen Kante in zwei Dimensionen. (b) Feldlinien und Äquipotenzialflächen einer Quadrupol-Linse.

Konforme Abbildung

Betrachte eine konforme, d.h. winkeltreue, Abbildung der Punkte (x,y) in der z-Ebene auf Punkte (ξ,η) in der ζ-Ebene:

$$z = x+iy = F(\zeta) = F(\xi+i\eta)$$

Nun sei in der z-Ebene eine Anordnung A von Leitern gegeben und hier für das Potentialproblem gelöst, d.h. eine Potentialfunktion $\varphi(x,y)$ gefunden, die an bestimmten Linien von A konstant wird und der Laplacegleichung genügt. φ sei der Realteil der analytischen Funktion $f = \varphi + i\psi$. Ferner sei in der ζ-Ebene eine Anordnung von Leitern B gegeben und für sie eine Lösung des Potentialproblems gesucht.

Läßt sich eine Funktion $F(\zeta) = z$ angeben, die die z-Ebene so auf die ζ-Ebene abbildet, daß hierbei die Figur A in die Figur B übergeht, so ist der Realteil der Funktion $f(F(\zeta))$ die gesuchte Potentialfunktion $\phi(\xi,\eta)$ für die Anordnung B. Denn ϕ genügt wie φ der Laplace-Gleichung und ist per Konstruktion auf den gewünschten Linien B konstant.