5. Wellenfelder an einfachen Grenzflächen

5.1. Lineare Feldtheorie für Schichtstrukturen

Wir verallgemeinern die Feldgleichungen in 4.1 zu

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\{n_i\}} C^{\beta\alpha}_{n_0 \dots n_d}(\vec{x})\, \partial_t^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_\alpha(\vec{x},t) = I_\beta(\vec{x},t)$$

Koeffizienten sind nun <u>ortsabhängig</u>

Ansatz: monochromatisches Feld

$$F_\alpha(\vec{x},t) = F_\alpha^\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$I_\alpha(\vec{x},t) = I_\alpha^\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$(*) \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\{n_i\}} C^{\beta\alpha}_{n_0 \dots n_d}(\vec{x})\, (-i\omega)^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_\alpha^\omega(\vec{x}) = I_\beta^\omega(\vec{x})$$

also eine Differentialgleichung im Ortsraum.

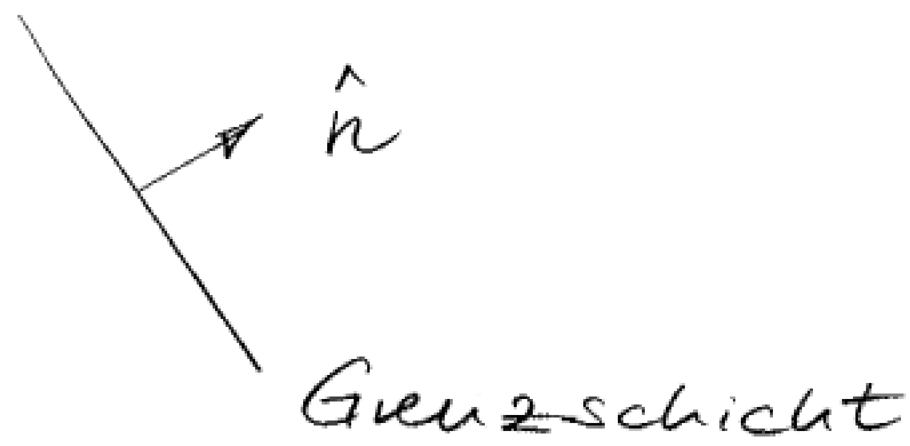
Satz: Jede Lösung der Feldtheorie ist eine Superposition von monochromat. Funktionen

$$\boxed{F_\alpha(\vec{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, F_\alpha^\omega(\vec{x})\, e^{-i\omega t}}$$

wobei $F_\alpha^\omega(\vec{x})$ Lösung von $(*)$ ist

Im folgenden werden wir nur die homogenen Feldgleichungen betrachten, also $I \equiv 0$.

Wellenfelder an Schichten



Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten der Feldtheorie $C^{\beta\alpha}_{\dots}(\vec{x})$ auf Hyperflächen $\perp \vec{n}$ konstant sind.

Wir legen $\vec n$ so, daß $\vec n = (0, \dots, 0, 1)$;
$\vec x = (\vec y, z)$, $z \perp$ Schicht $\rightsquigarrow C^{\beta\alpha}_{\dots}(z)$

Wir können dann den Ansatz machen
$$F^{\omega}_{\alpha}(\vec x) = e^{i\vec p\cdot\vec y}\, F^{\omega,\vec p}_{\alpha}(z)$$
wobei $F^{\omega,\vec p}_{\alpha}$ Fourierkoeffizienten sind
$\vec p\cdot\vec y = p_1 y_1 + \dots + p_{d-1} y_{d-1}$
$\vec y \in \mathbb{E}^{d-1}$, $\vec p \in \mathbb{E}^{d-1}$
($d-1$ dim euklidische Räume)
$\vec p$ heißt Wellenvektor $\parallel$ Schicht ($\perp \vec n$)

Obiger Ansatz ist dann Lösung von
$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n} C^{\beta\alpha}_{n}(\omega, \vec p, z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n} F^{\omega\vec p}_{\alpha}(z) = 0$$

wobei

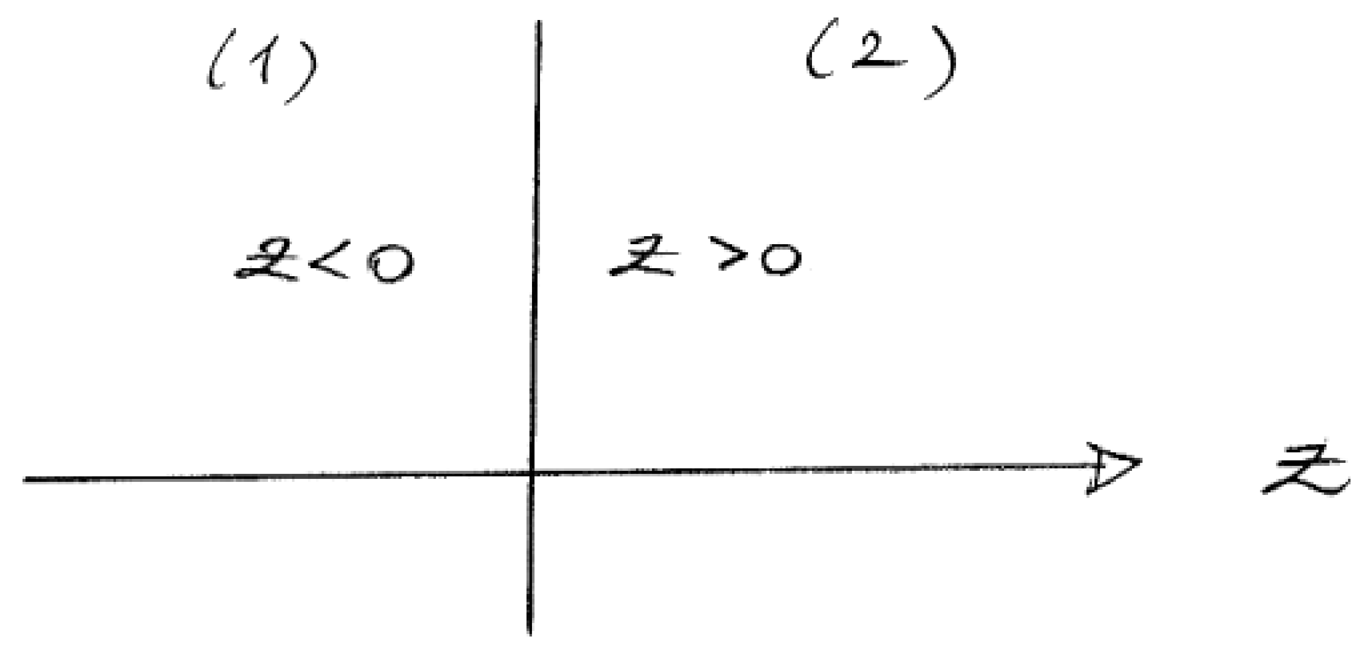
$n = n_d$
$$C^{\beta\alpha}_{n}(\omega, \vec p, z) = \sum_{\{n_0, \dots, n_{d-1}\}} C^{\beta\alpha}_{n_0 \dots n_{d-1}}(z)\,(-i\omega)^{n_0}\,(ip_1)^{n_1} \dots (ip_{d-1})^{d-1}$$

Satz: Jede Lösung zu (*) läßt sich schreiben als Superposition

$$F_\alpha^\omega(\vec{y}, z) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}} \, F_\alpha^{\omega\vec{p}}(z)$$

wobei $F_\alpha^{\omega\vec{p}}$ Lösung von (ϕ)

Einfache Grenzflächen



Das Medium sei in (1) und (2) jeweils homogen, d.h. in (1) und (2) haben wir jeweils eine freie Feldtheorie vorliegen. Der Anschluß erfolgt über Randbedingungen.
(Die Verallgemeinerung zu mehreren Grenzschichten ist trivial: $(1)\,|\,(2)\,|\,(3)\,|\,\dots$)

Satz: In jedem Halbraum ist die Lösung der Feldgleichungen eine Superposition

$$F_{\alpha,\nu}^{\omega\vec{p}}(z) = e^{iK_\nu z} \, F_{\alpha,\nu}^{\omega\vec{p}}$$

mit $K_1, \dots, K_{\nu_{max}}$ charakter. Wurzeln (EW)

K_ν, F_ν folgen aus den algebraischen Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_n C_n^{\beta\alpha\,(1,2)} (iK_\nu)^n F_{\alpha,\nu}^{\omega\vec{p}} = 0$$

+ Randbedingungen

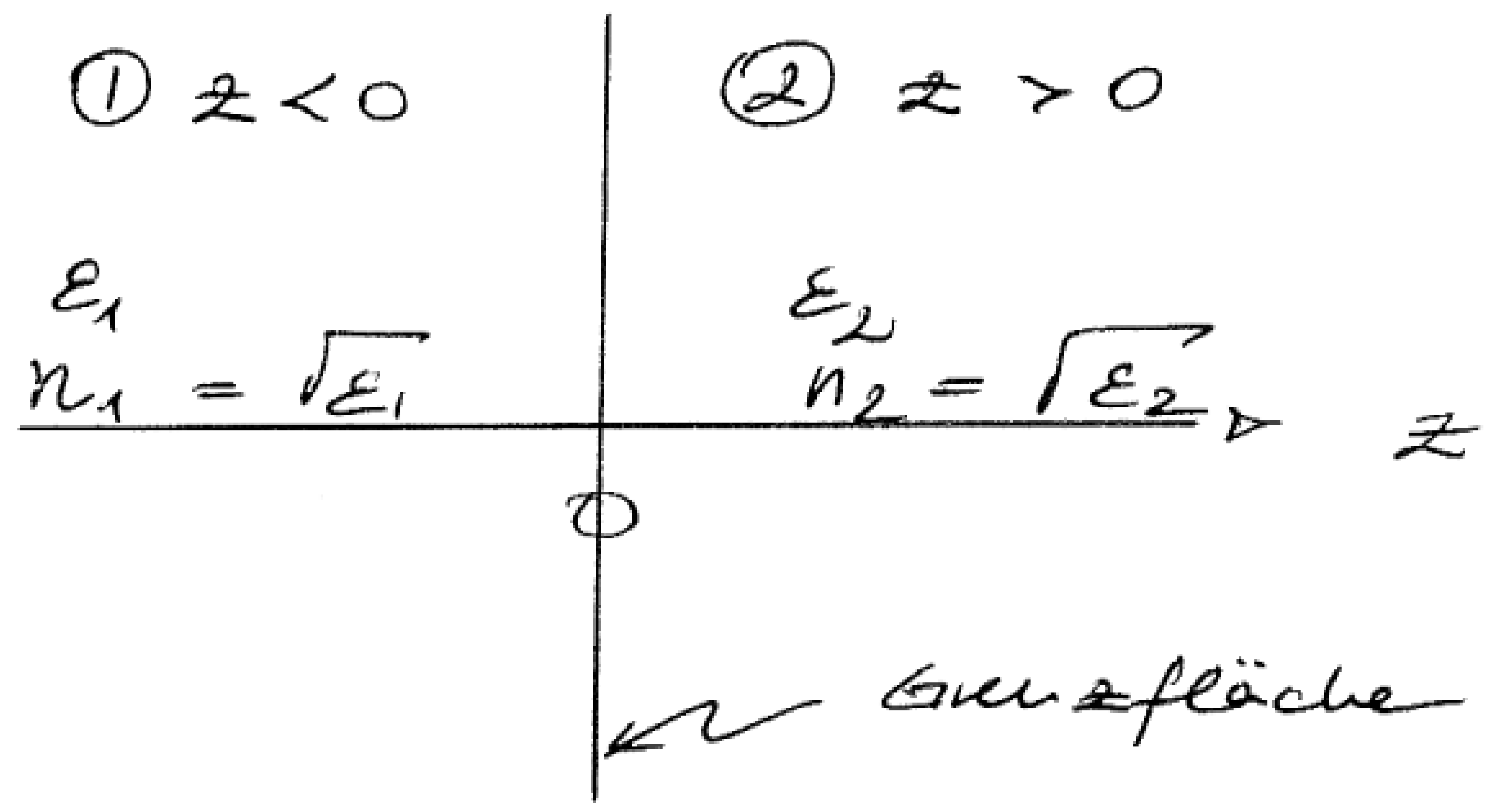
Komplexe Lösung

$$F_\alpha(\vec{y}, z, t) = \sum_\mu \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \, e^{-i\omega t} e^{i\vec{p}\vec{y}} \, e^{i\kappa_\mu z} \, F_{\alpha,\mu}^{\omega,\vec{p}}$$

Die Physik steckt in κ_μ
und den Amplituden $F_{\alpha,\mu}^{\omega,\vec{p}}$.

5.2. Reflexion und Transmission an idealen Dielektrikum

Betrachte eine ebene Grenzfläche zwischen idealen Dielektrika mit konstanten DK'n.



Die Dispersionsrelation in einem idealen homogenen Dielektrikum lautet

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 \qquad \left(v = \frac{c}{n} \right)$$

wobei $n = \sqrt{\varepsilon}$

als <u>Brechungsindex</u> bezeichnet wird

Wir teilen den Wellenvektor $\vec{k}$ auf in Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche

$$\vec{k} = \vec{p} + \vec{\kappa}$$

$\vec{p} = 0$ heisst senkrechter Einfall.

In diesem Unterkapitel befassen wir uns nur mit dem Spezialfall des senkrechten Einfalls auf die Grenzfläche ($\vec{p}=0$). Dann gilt

$$\kappa_\pm = \pm \frac{n}{c}\omega$$

$$\vec{k}_\pm = (0, 0, \kappa_\pm)$$

$$\vec{E}^\omega(z) = \begin{pmatrix} E_x^+ \\ E_y^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{n}{c}\omega z} + \begin{pmatrix} E_x^- \\ E_y^- \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{n}{c}\omega z}$$

$$\vec{B}^\omega(z) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^{-1} \vec{k}_\pm \times \vec{E}^\omega(z)$$

$$= n\left[\begin{pmatrix} -E_y^+ \\ E_x^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{n}{c}\omega z} + \begin{pmatrix} E_y^- \\ -E_x^- \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{n}{c}\omega z}\right]$$

ist allgemeine Lösung (Summe aus rechts- und linkslaufender Welle) für die Fourier-komponenten $\vec{E}^\omega(z)$ und $\vec{B}^\omega(z)$; hier bezeichnet dann jeweils den Brechungsindex in den Gebieten ① oder ②.

Zur weiteren Analyse verwenden wir nun die in Kapitel 3.4. abgeleiteten Stetigkeitsbedingungen:

(1) E_t stetig $\Rightarrow$ $E_x^{+(1)} + E_x^{-(1)} = E_x^{+(2)} + E_x^{-(2)}$
ebenso für y-Komponente

(2) B_t stetig $\Rightarrow$ $n_1\left(E_x^{+(1)} - E_x^{-(1)}\right) = n_2\left(E_x^{+(2)} - E_x^{-(2)}\right)$
ebenso für y-Komponente

Wir nehmen nun die folgende Fallunterscheidung vor

(a) $E_y \equiv 0$; elem. Welle in x-Richtung lin. pol.

(b) $E_x \equiv 0$; —"— in y-Richtung —"—

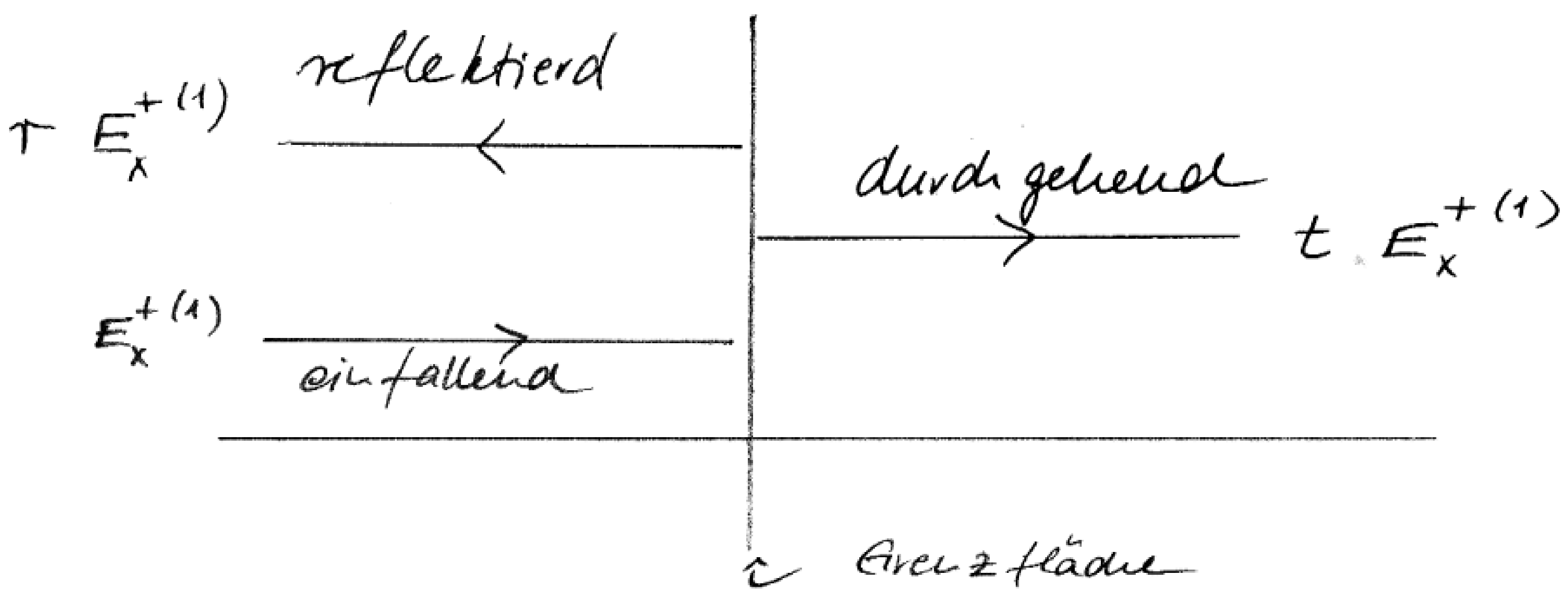
Fall (1) Sei $E^{-(2)} = 0$, d.h. wir betrachten eine von links einfallende Welle. Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen (1) und (2)

$$n_1\,(1) + (2) : \rightsquigarrow \quad 2 n_1 E_x^{+(1)} = n_1\left(E_x^{+(2)} + E_x^{-(2)}\right) + n_2\left(E_x^{+(2)} - E_x^{-(2)}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 n_1 E_x^{+(1)} = (n_1 + n_2)\, E_x^{+(2)} + (n_1 - n_2)\, \underbrace{\cancel{E_x^{-(2)}}}_{=0}$$

$$n_2\,(1) - (2) \quad \rightsquigarrow \quad (n_1 + n_2)\, E_x^{+(1)} + (n_2 - n_1)\, E_x^{-(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} E_x^{+(2)} &= \frac{2 n_1}{(n_1 + n_2)}\, E_x^{+(1)} \\ E_x^{-(1)} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\, E_x^{+(1)} \end{aligned}}$$



Damit ergibt sich

Reflexionskoeff. $\boxed{r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}}$

Transmissionskoeff: $\boxed{t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}}$

Die allgemeine Lösung findet man durch Superposition (siehe 5.1)

$$E_x(z,t) = \underbrace{\theta(z) E_t(z,t)}_{\text{durchgehend}} + \underbrace{\theta(-z)\left[E_i(z,t) + E_r(z,t)\right]}_{\text{einfallend + reflektiert}}$$

wobei

$$E_i(z,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E_x^{+(1)}(\omega)\, e^{i\left(\frac{n_1}{c}\omega z - \omega t\right)}$$

$$= \int dk\, a(k)\, e^{i(kz - \omega_1(k)\cdot t)}$$

mit $\omega_1(k) = v_1 k$, $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$

und $k = \dfrac{n_1}{c}\omega$

$$a(k) = \frac{c}{2\pi n_1} E_x^{+(1)}\left(\frac{c}{n_1}k\right)$$

$$E_r = \int dk\, a(k) \cdot r\, e^{i(-kz - \omega_1(k)\cdot t)}$$

$$E_t = \int \frac{d\omega}{2\pi} E_x^{+(1)}(\omega)\, t\, e^{i\left[\frac{n_2}{c}\omega z - \omega t\right]}$$

$$= \int dk \cdot \frac{c}{n_2}\frac{1}{2\pi} E_x^{+(1)}\left(\frac{c}{n_2}k\right) t\, e^{i(kz - \omega_2(k) t)}$$

$k := \dfrac{n_2 \omega}{c}$

$\omega_2 = \dfrac{c}{n_2} k = v_2 k$

$$= \int dk\, \frac{c}{2\pi n_1} E_x^{+(1)}\left(\frac{c}{n_2}k\right) \frac{n_1}{n_2}\, t\, e^{i(kz - \omega_2(k) t)}$$

5.3. Wellenausbreitung und Felddiffusion in leitenden Medien

In diesem Kapitel untersuchen wir die Wellenausbreitung in leitenden Medien. Der Einfachheit wegen beginnen wir mit dem Materiemodell eines Ohmschen Leiters:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{B} = 0 && \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 \\ &\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho && \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ &\vec{j} = \sigma \vec{E} && (\text{Ohm'sches Gesetz}) \end{aligned}}$$

($\mu = \varepsilon = 1$, statische magn. und el. Permeabilität)

Aus der Kontinuitätsgleichung für Ladungen und dem Ohmschen Gesetz folgert man

$$0 = \partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \partial_t \rho + \sigma \vec{\nabla}\vec{E}$$

oder mit dem Coulombschen Gesetz

$$\partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + 4\pi\sigma\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

Im Frequenzraum gilt dann

$$(-i\omega + 4\pi\sigma)\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{\omega} = 0$$

oder mit $\boxed{\varepsilon(\omega) := 1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$ als der frequenzabh. DK des Ohmschen Leiters

$$\boxed{\varepsilon(\omega)\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{\omega} = 0.}$$

Eliminiert man nun aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz und dem Ampère-Maxwell'schen Durchflutungsgesetz das Magnetfeld $\vec{B}$, so ergibt sich die <u>Telegraphengleichung</u>

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\partial_t \vec{E}}$$

(Die rechte Seite wirkt als Dämpfung). Sie läser sich durch Übergang in den Frequenzraum auf die Form einer Helmholtz-Gleichung bringen

$$\Delta \vec{E}^{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\left(1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)}_{=\,\varepsilon(\omega)}\vec{E}^{\omega} = 0$$

Verschiebungsstrom Leitungsstrom

$$\boxed{\Delta \vec{E}^{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\,\vec{E}^{\omega} = 0}$$

Im Frequenzraum lauten das Faraday und Ampere-Maxwell Gesetz

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E}^{\omega} - \frac{i\omega}{c}\vec{B}^{\omega} &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{B}^{\omega} + \frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega)\,\vec{E}^{\omega} &= 0 \end{aligned}}$$

Weiter gilt noch $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B}^{\omega} = 0.}$ Damit haben wir für den Ohmschen Leiter formal dieselben Maxwellgleichungen wie für ein Dielektrikum mit einer komplexen frequenzabhängigen DK.

Damit lautet der komplexe Brechungsindex für einen Ohmschen Leiter

$$\boxed{n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}$$

Dies läßt sich auf den Fall eines Drude Modells verallgemeinern:

$$\boxed{n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}}}$$

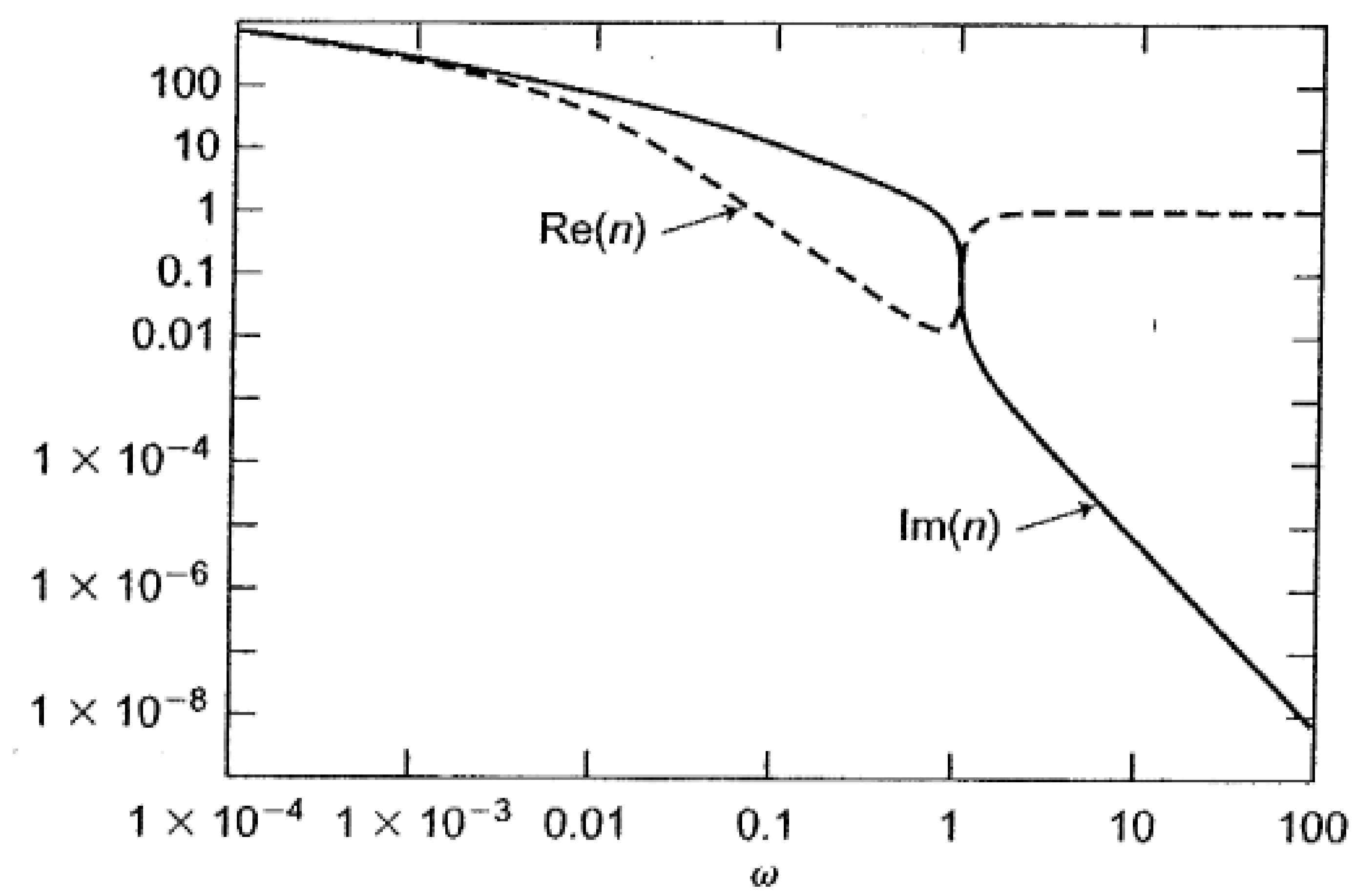
wobei $\sigma(\omega) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\omega_p^2}{-i\omega + \gamma}$ die freq. abh. Leitfähigkeit im Drude Modell ist.

Grenzfälle

$$n(\omega) \rightarrow \begin{cases} \omega \to \infty : & 1 \\ \omega \to 0 : & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}} \end{cases}$$

$\omega < \omega_p$ $n(\omega)$ hauptsächl. imaginär

$\omega > \omega_p$ — " — reell



Complex index of refraction.

Fig 7.10 aus Brau

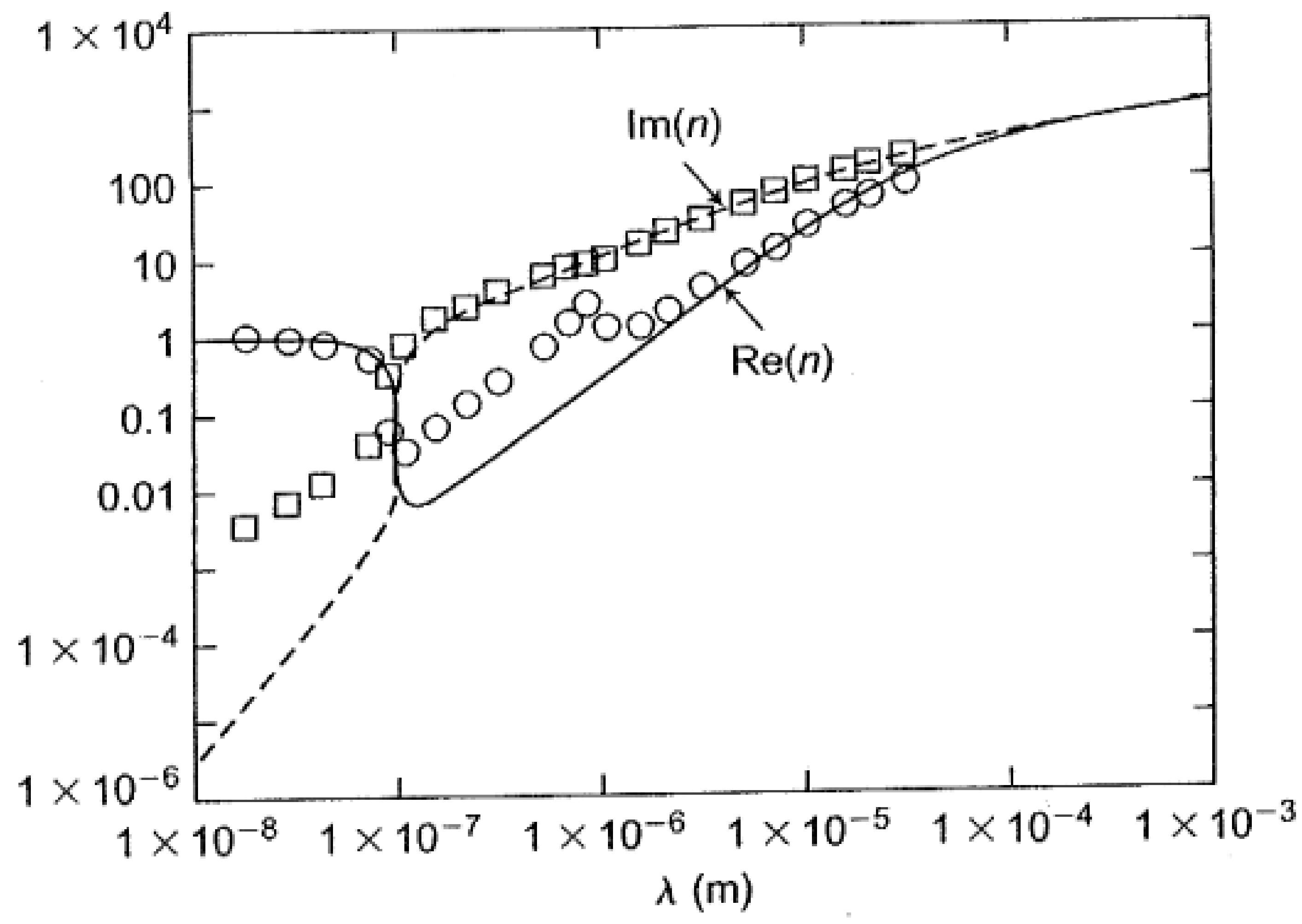


Figure 7.11 Complex index of refraction of aluminum.

The Drude model is plotted versus wavelength and compared with experimental data for aluminum in Figure 7.11. The solid curves correspond to the parameters $\omega_p = 1.98 \times 10^{16}$ radians/s and $\gamma = 9.8 \times 10^{13}$/s. Since aluminum has an electron density $n_e = 1.8 \times 10^{29}/\mathrm{m}^3$ and a dc conductivity $\sigma_0 = 3.65 \times 10^7/\Omega$-m at room temperature, the straightforward application of (7.163) and (7.180) would predict the parameters $\omega_p = 2.4 \cdot 10^{16}$ radians/s and $\gamma = 1.4 \cdot 10^{13}$/s, which are somewhat at variance with the parameters inferred from optical measurements. With the "best fit" values of ω_p and γ, the agreement between the observed and calculated values of the real and imaginary parts of the complex index of refraction is good in the infrared ($\lambda > 10^{-6}$ m). At shorter wavelengths, the Drude model has the correct qualitative behavior, showing a sharp crossover of the real and imaginary parts at the plasma frequency ($\lambda \approx 10^{-7}$ m), but there are quantitative discrepencies. The disagreement at wavelengths below about 1.7×10^{-6} m has its origin in the excitation of conduction electrons to higher bands and, at still shorter wavelengths, to the excitation of inner-shell electrons.

Aus C. A. Brau,
„Modern Problems in Classical
Electrodynamics",
Oxford

Für eine ebene Welle ergibt sich dann die Dispersionsrelation

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{i\,\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}}\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{i\,4\pi\frac{\sigma}{\omega}}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}}\right)$$

Im <u>Niederfrequenzlimes</u>

$$\frac{\omega}{\sigma} \ll 1 \quad , \quad \frac{\omega}{\gamma} \ll 1$$
(guter Leiter) (Niederfrequenz)

gilt dann für die Dispersionsrelation

$$k^2 = i\,\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}}\,(1+i)$$

Man liest daran ab, daß

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}}$$

die Längenskala ist, auf der die Amplitude der elm. Welle zerfällt (in den Leiter eindringt). Diese Länge heißt <u>Skintiefe</u>

Zahlenbeispiel: Cu

60 Hz	$\delta \cong 1\,\mathrm{cm}$	(Wechselstrom)
2.45 GHz	$\delta \cong 1\,\mu\mathrm{m}$	(Mikrowelle)

Falls $\frac{\omega}{\gamma} \ll 1$ (Niederfreq.) aber $\frac{\omega}{\sigma} \gg 1$

dann

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\, 4\pi \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

$$k \cong \frac{\omega}{c}\left(1 + i\, 2\pi \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

und die Eindringtiefe wird zu

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sigma} \qquad \text{(Elektrolyte, Halbleiter)}$$

also unabhängig von der Frequenz.

In diesem Fall gilt für den Reflexionskoeff.

$$r(\omega) = \frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)} \cong \frac{1-\left(1+i\,\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)}{1+\left(1+i\,\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)} \approx \frac{1}{i}\,\frac{\pi\sigma}{\omega} + O\!\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

i.e. $|r(\omega)| \ll 1$

Vgl. hierzu den Fall eines guten Leiters

$$|r(\omega)| = \left|\frac{1-\sqrt{i}\,\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}{1+\sqrt{i}\,\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}\right| \cong 1 - O\!\left(\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}\right)$$

nahezu perfekte Reflexion.