4.6. Cauchy-Problem und allgemeine Wellenfelder

Cauchy-Problem: Welche Anfangsbedingungen legen die Lösung der Feldgleichungen fest?

Als Beispiel betrachten wir hierzu zunächst die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \Delta + \kappa^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

(entspricht für $\kappa = 0$ der Wellengleichung)

Wir führen eine Fouriertransformation durch

$$\hat{\psi}(\vec{k}, t) = \int d^3x \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}, t)$$ und

erhalten

$$\left[\frac{1}{v^2} \partial_t^2 + k^2 + \kappa^2 \right] \hat{\psi}(\vec{k}, t) = 0$$

oder

$$\partial_t^2 \hat{\psi}(\vec{k}, t) = -\omega^2(k) \hat{\psi}(k, t)$$

mit $\hat{\omega}(k) = v\sqrt{k^2 + \kappa^2}$ als

Dispersionsrelation

Damit ist die KG Gleichung auf die Gleichung eines harmonischen Oszillators reduziert. Wir wissen damit, daß die Lösungen der KG Gleichung eindeutig durch die Angabe der Anfangswerte und Anfangsgeschwindigkeiten der Felder zu einem Zeitpunkt t_0 bestimmt sind

$$\hat{F}(\vec{k}) = \hat{\psi}(\vec{k}, t_0) \quad ; \quad F(\vec{x}) = \hat{\psi}(\vec{x}, t_0)$$

$$\hat{G}(\vec{k}) = \partial_t \hat{\psi}(\vec{k}, t_0) \quad ; \quad G(\vec{x}) = \partial_t \hat{\psi}(\vec{x}, t_0)$$

Die Lösung lautet

$$\hat{\varphi}(\vec{k},t) = a_+(\vec{k})\, e^{-i\omega(\vec{k})(t-t_0)} + a_-(\vec{k})\, e^{+i\omega(\vec{k})(t-t_0)}$$

Anfangsbedingungen

$$\hat{F}(\vec{k}) = a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k})$$

$$\hat{G}(\vec{k}) = -i\omega(\vec{k})\left[a_+(k) - a_-(\vec{k})\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad a_\pm(\vec{k}) = \frac{1}{2}\left[\hat{F}(\vec{k}) \pm \frac{i}{\omega(\vec{k})}\hat{G}(\vec{k})\right]$$

Rücktransformation:

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[a_+(\vec{k})\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})(t-t_0)]} + a_-(\vec{k})\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega(\vec{k})(t-t_0)]}\right]$$

Die allgemeine Lösung der KG Gleichung ist also eine <u>Superposition ebener monochromatischer Wellen</u>.

Bemerkung: Derartige Zerlegungen von Feldgleichungen spielen eine wichtige Rolle bei deren „Quantisierung"

Cauchy - Problem der Maxwell Theorie (im idealen Dielektrikum)

Wir führen eine Fourier zerlegung der elem. Felder durch

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{x},t) \\ \vec{B}(\vec{x},t) \end{pmatrix} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \begin{pmatrix} \hat{\vec{E}}(\vec{k},t) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{k},t) \end{pmatrix}$$

Aus den Maxwell gleichungen erhalten wir dann:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \operatorname{div} \vec{E} = 0 & ; & i\vec{k}\cdot\hat{\vec{E}} = 0 \\
(2) & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 & ; & i\vec{k}\times\hat{\vec{E}} + \frac{1}{c}\partial_t \hat{\vec{B}} = 0 \\
(3) & \operatorname{div} \vec{B} = 0 & ; & i\vec{k}\cdot\hat{\vec{B}} = 0 \\
(4) & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\partial_t \vec{E} = 0 & ; & i\vec{k}\times\hat{\vec{B}} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\partial_t \hat{\vec{E}} = 0
\end{array}$$

(1), (3) $\rightsquigarrow$ Transversalität der elem. Felder

$$\boxed{\hat{\vec{B}}^{\parallel} = 0 = \hat{\vec{E}}^{\parallel}}$$

$$\begin{aligned}
(2)\quad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \hat{\vec{B}}^{\perp} &= -i\vec{k}\times\frac{1}{c}\partial_t \hat{\vec{E}}^{\perp} \\
&\underset{(4)}{=} -i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\hat{\vec{B}}^{\perp})\,\frac{1}{\varepsilon\mu} \\
&= -k^2\,\hat{\vec{B}}^{\perp}\,\frac{1}{\varepsilon\mu}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\partial_t^2 \hat{\vec{B}}^{\perp} + k^2 \hat{\vec{B}}^{\perp} = 0}$$

$\omega = v k$ mit $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

als Wellengeschwindigkeit

Analog zeigt man

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\partial_t \vec{E}^\perp + k^2\,\vec{E}^\perp = 0$$

Zur Frage der Lösung des Cauchy Problems genügt es die Gleichungen (2) und (4) zu betrachten. Es handelt sich um zwei gekoppelte lineare Differentialgleichung 1ter Ordnung in ∂_t. Folglich sind die elm. Felder eindeutig durch die Angabe von $\vec{E}^\perp(\vec{x},t_0)$ und $\vec{B}^\perp(\vec{x},t_0)$ bestimmt.
Die allgemeine Lösung ist dann wie bei der KG Gleichung die Superposition ebener monochromatische Wellen mit $\begin{pmatrix}\text{linearer}\\ \text{zirkularer}\end{pmatrix}$ Polarisation.

4.7. Formel von D'Alembert

Betrachte eine Feldtheorie, die durch die Wellengleichung gegeben ist

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \psi(\vec{x},t) = 0$$

Für ebene Wellen $\psi(\vec{x},t) = \psi_0 \, e^{i\varphi(\vec{x},t)}$ mit $\varphi(\vec{x},t) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$ ergibt sich aus der Wellengleichung die Dispersionsrelation $\omega(k) = c|\vec{k}|$. Wähle die Ausbreitungsrichtung der Welle in Richtung der z-Achse: $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{e}_z$. Dann reduziert sich die Wellengleichung auf ein eindimensionales Problem

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_z^2 \right) \phi(z,t) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich auf vielerlei Wegen finden. Wir wählen hier den Weg über die Fouriertransformation (siehe Cauchy-Problem für die KG Gleichung)

$$\phi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[a_+(k)\, e^{ikz - i\omega(k)t} + a_-(k)\, e^{ikz + i\omega(k)t} \right]$$

Verwende die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = v|\vec{k}| = \begin{cases} vk & k > 0 \\ -vk & k < 0 \end{cases}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (\Theta\text{ - Funktion})$$

$$\phi(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \Big[\theta(k) \left(a_+(k) e^{-ivkt} + a_-(k) e^{+ivkt} \right)$$

$$+ \theta(-k) \left(a_+(k) e^{+ivkt} + a_-(k) e^{-ivkt} \right) \Big]$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \Big\{ e^{ik\underbrace{(z-vt)}_{=z_+}} \underbrace{\left[\theta(k)\, a_+(k) + \theta(-k)\, a_-(k) \right]}_{=\hat{\phi}_+(k)}$$

$$+ e^{ik\underbrace{(z+vt)}_{=z_-}} \underbrace{\left[\theta(k)\, a_-(k) + \theta(-k)\, a_+(k) \right]}_{=\hat{\phi}_-(k)} \Big\}$$

$$k > 0 \; : \quad \hat{\phi}_+(k) = a_+(k)$$
$$\hat{\phi}_-(k) = a_-(k)$$

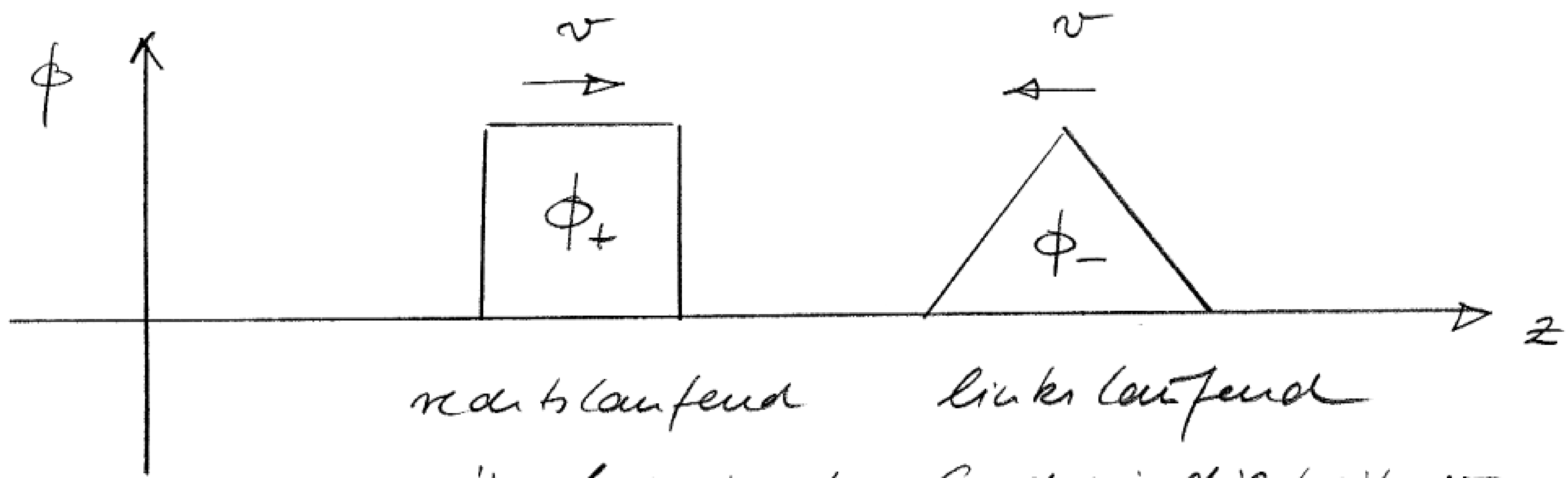
$$k < 0 \; : \quad \hat{\phi}_+(k) = a_-(k)$$
$$\hat{\phi}_-(k) = a_+(k)$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \left[e^{ikz_+ t} \hat{\phi}_+(k) + e^{ikz_- t} \hat{\phi}_-(k) \right]$$

$$= \phi_+(z-vt) + \phi_-(z+vt)$$

Die allgemeine Lösung der 1D Wellengl. ist durch zwei beliebige Funktionen $\phi_+(z)$ und $\phi_-(z)$ durch die D'Alembert Formel gegeben

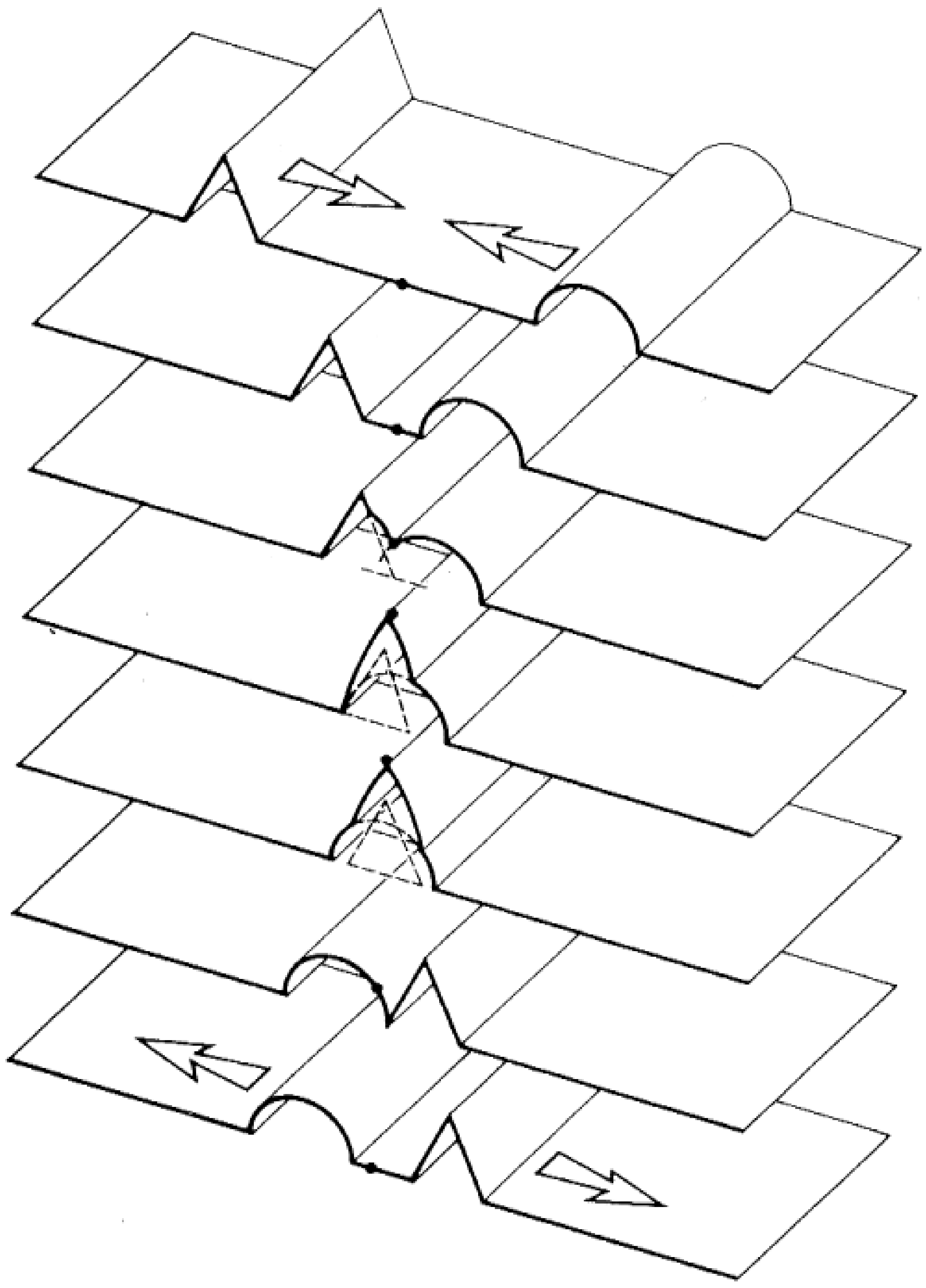
$$\boxed{\phi(z,t) = \phi_+(z-vt) + \phi_-(z+vt)}$$



rechtslaufend linkslaufend
mit konstanter Geschwindigkeit v
und ohne Formänderung

Wegen der Linearität der Wellengleichung lassen sich zwei (oder mehrere) Wellenzüge superponieren. Sie bleiben auch nachdem sie sich durchdrungen haben unverändert.

Bem: Auch nichtlineare Differentialgleichungen können spezielle Lösungen haben, die mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum wandern → solitäre Lösungen. Sie besitzen oft nur spezielle Formen $f(z_\pm)$. Obwohl für nichtlineare Differentialgln. das Superpositionsprinzip nicht gilt, kann es in Sonderfällen geschehen, daß sich solitäre Lösungen überlagern lassen ohne sich zu stören → Solitonen.



The superposition of two disturbances.