1. Mathematische Formulierung des Feldbegriffs

$$\vec{x}\,' = \mathcal{D}\,\vec{x} \quad ; \quad \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$$

Skalarfeld : $\phi(\vec{x}\,') = \phi(\vec{x})$

Vektorfeld : $\vec{A}\,'(\vec{x}\,') = \mathcal{D}\,\vec{A}(\vec{x})$

(· Det $\mathcal{D}$ $\rightsquigarrow$ Pseudofeld)

Gradient :
$$\frac{d\phi}{dl} = \vec{t} \cdot \vec{\nabla}\phi \qquad \text{(Richtungsableitung)}$$

$\vec{\nabla}\phi$ $\perp$ Äquipotentialflächen

$\nearrow$ stärkster Anstieg

Rotation :
$$\hat{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \lim_{df\to 0} \frac{1}{df} \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$$

(Stokes) $$\oint_{\partial F} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_F \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{f}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \rightsquigarrow \exists\,\phi : \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi .$$

konservativ $\Longleftrightarrow$ wirbelfrei

Divergenz :
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta F} \vec{E}\cdot d\vec{f}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

(Gauß) $$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \rightsquigarrow \exists\,\vec{A} : \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

Fundamentalsatz der Vektoranalysis :

Ein Vektorfeld ist durch Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt und läßt sich immer in quellen- und wirbelfreie Anteile zerlegen
$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_w$$
$$\mathrm{div}\,\vec{F}_w = 0 \quad ; \quad \mathrm{rot}\,\vec{F}_g = 0$$