WiSe 2007/08 20.12.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Marta Balbás Gambra/Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 9

Diese umfangreiche Zusammenstellung von Ergänzungsaufgaben soll Ihnen die Gelegenheit geben, sich einen Überblick über den bisher behandelten Stoff zu verschaffen und diesen nochmals zu wiederholen. Es wird hier keine Musterlösung geben. Aufgaben mit * sind klausurrelevant.

Ergänzungssaufgabe 9.1 *Vektorrechnung*

$P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (3,0,4)$, $P_2 = (4,3,-1)$ und $P_3 = (0,5,2)$ seien Eckpunkte eines Tetraeders. Man berechne

a) die Längen der Seiten

Antwort: $\overline{P_0P_1} = 5$, $\overline{P_0P_2} = \sqrt{26}$, $\overline{P_0P_3} = \sqrt{29}$, $\overline{P_1P_2} = \sqrt{35}$, $\overline{P_1P_3} = \sqrt{38}$, $\overline{P_2P_3} = \sqrt{29}$

b) die Winkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$

Antwort: $\sphericalangle(P_3P_1P_2) = 52.90°$, $\sphericalangle(P_1P_2P_3) = 65.92°$, $\sphericalangle(P_2P_3P_1) = 61.18°$

c) die Oberfläche F und das Volumen V des Tetraeders

Antwort: $F = 51.595$, $V = 18.833$

Ergänzungssaufgabe 9.2 *Matrizenmultiplikation*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und das Polynom $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + x + 4$. Man bestimme die Potenzen A^2, A^3, A^4 und die Matrix $p(A)$.

Antwort: $A^2 = -\mathbb{1}$, $A^3 = -A$, $A^4 = \mathbb{1}$, $p(A) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Ergänzungsaufgabe 9.3 *Diagonalisierung symmetrischer Matrizen **

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort: $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -7,\ \lambda_3 = 7,\ \vec{e}_1 = (-1, 2, 0),\ \vec{e}_2 = (-3, -2, 4),\ \vec{e}_3 = (2, -1, 2)$.

Ergänzungsaufgabe 9.4 *Raumkurven **

Bestimmen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{\vec{t}}, \hat{\vec{n}}, \hat{\vec{b}})$ sowie Krümmung κ und Torsion τ der Raumkurve $\vec{r}(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t)$ bei $t = 0$.

Antwort: $\hat{\vec{t}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \hat{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\ \hat{\vec{b}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2),\ \kappa = \frac{1}{3}\sqrt{2},\ \tau = \frac{1}{3}$.

Ergänzungsaufgabe 9.5 *Vektoranalysis*

a) Lassen sich die Konstanten a, b, und c in der Funktion $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ so wählen, dass f harmonisch ist, d.h. dass $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$?

Antwort: $a + c = 0$

b) * Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Vektorfelds $\vec{a} = (xy, xz, x^2yz^2)$.

Antwort: $\operatorname{div} \vec{a} = y + 2x^2yz,\ \operatorname{rot} \vec{a} = (x^2z^2 - x, -2xyz^2, z - x)$.

Ergänzungsaufgabe 9.6 *Krummlinige Koordinaten **

a) Geben Sie das Vektorfeld $\vec{v}_2 = (y, x)$ in ebenen Polarkoordinaten an.

Antwort: $\vec{v}_2 = \varrho \sin 2\varphi\ \hat{\vec{e}}_\varrho + \varrho \cos 2\varphi\ \hat{\vec{e}}_\varphi$.

b) Zeigen Sie, dass die dreidimensionale Verallgemeinerung $\vec{v}_3 = (y, x, 0)$ rotationsfrei ist. Bestimmen Sie ein Potential Φ, so das $\vec{v}_3 = \operatorname{grad} \Phi$. Schreiben Sie dieses Potential in Zylinderkoordinaten und bestimmen Sie $\operatorname{grad} \Phi$ in Zylinderkoordinaten.

Antwort: $\Phi = \varrho^2 \cos \varphi \sin \varphi$.

Ergänzungsaufgabe 9.7 *Flächenintegrale **

Welchen Flächeninhalt hat das durch die Ungleichungen $y \geq x^2$ und $y \leq x$ beschriebene Gebiet?

Antwort: $F = \frac{1}{6}$.

Ergänzungsaufgabe 9.8 *Volumenintegrale **

Aus einer Kugel vom Radius R werde ein Zylinder mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius $R/2$ so herausgebohrt, dass der Kugelmittelpunkt auf der Zylinderwand liegt (siehe Aufgabe 5.5 zur Vivianischen Kurve). Berechnen Sie das Volumen des verbleibenden Körpers.

Hinweis: Legen Sie die Zylinderachse durch den Punkt $(R/2, 0, 0)$ und berechnen Sie das Volumen des herausgeschnittenen Teils in ebenen Polarkoordinaten als Flächenintegral über die Funktion, die die Höhe der Kugel über der x-y-Ebene angibt.

Antwort: $V = \frac{2}{3}R^3(\pi + \frac{4}{3})$.

Abgabe: (Freiwillige Wiederholungen)