WiSe 2007/08 23.11.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 7

Tutoriumsaufgabe 7.1 *Differentialoperatoren der Vektoranalysis in Kugelkoordinaten*

Betrachten Sie das elektrische Quadrupolfeld $\vec{E} = F(x, y, -2z)$ aus der Vorlesung.

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Deswegen gibt es ein Potential Φ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$. Wie lautet Φ?

b) Schreiben Sie Φ in Kugelkoordinaten $((x, y, z) = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta))$.

c) Berechnen Sie das Feld $\vec{E}$ in Kugelkoordinaten. Der Gradient lautet

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{\vec{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{\vec{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\hat{\vec{e}}_\phi.$$

d) Zeigen Sie, dass auch in Kugelkoordinaten $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Für das Vektorfeld $\vec{E} = E_r\hat{\vec{e}}_r + E_\theta\hat{\vec{e}}_\theta + E_\phi\hat{\vec{e}}_\phi$ berechnet man die Divergenz mit:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}.$$

Tutoriumsaufgabe 7.2 *Wasserstoffatom*

Sei $\Phi(r) = q\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-2r/a}$ das elektrostatische Potential des Wasserstoffatoms im Grundzustand (Orbital 1s).

a) Berechnen Sie das elektrische Field $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$. Benutzen Sie dafür Kugelkoordinaten.

b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$.

Aufgabe 7.3 *Vektoranalysis: Divergenz und Rotation*

Für die Plots in dieser Aufgabe sollten Sie Mathematica benutzen. Um Feldlinien zeichnen zu können, lädt man das entsprechende Paket mit dem Kommando `<< Graphics‘PlotField‘`.

a) Zeichnen Sie x- und y-Komponente des Vektorfelds $\vec{V}_1 = (-x, -y, 0)$. Das Kommando heißt `PlotVectorField[{-x,-y},{x,-2,2},{y,-2,2}]`. Dieses Feld könnte z.B. die Strömung einer Flüssigkeit in den Ursprung beschreiben, d.h. es existiert eine (negative) Quelle (=Senke). Bestätigen Sie diese Vermutung, indem Sie zeigen dass $\operatorname{div} \vec{V}_1 < 0$.

b) Zeichnen Sie x- und y-Komponente des Vektorfelds $\vec{V}_2 = (y, -x, 0)$. Dieses Feld könnte z.B. eine Flüssigkeit in einem rotierenden Behälter beschreiben, d.h. es existiert ein Wirbel. Überlegen Sie sich, in welche Richtung die Rotationsachse zeigt (rechte-Hand-Regel!). Überprüfen Sie, dass $\operatorname{rot}\vec{V}_2$ tatsächlich in diese Richtung zeigt.

c) Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}_3 = v_0(\sin(kx - ct), 0, 0)$ beschreibt eine Flüssigkeit beim Durchgang einer akustischen Welle. Zeigen Sie, dass die Divergenz $\operatorname{div}\vec{V}_3$ nur dort verschwindet, wo die lokale Geschwindigkeit $\vec{V}_3$ maximal bzw. minimal ist (an allen anderen Orten wird das Medium gestaucht bzw. gestreckt).

d) Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{V}_4 = \dot{\gamma}(0, x, 0)$ beschreibt eine Flüssigkeit unter dem Einfluss von Scherkräften. Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\vec{V}_4$. Überzeugen Sie sich davon, dass das Ergebnis sinnvoll ist, in dem Sie sich überlegen, was mit einem Stock passieren würde, der am Ursprung parallel zur x-Achse ins Wasser geworfen wird. Zeigen Sie, dass bei Dichtewellen wie in Teil c) keine Scherkräfte auftreten, d.h. dass $\operatorname{rot}\vec{V}_3 = 0$.

e) Das Helmholtz-Theorem besagt, dass sich jedes (physikalische) Vektorfeld $\vec{V} = \vec{V}_s + \vec{V}_g$ in einen divergenzfreien Anteil $\vec{V}_s$ und einen rotationsfreien Anteil $\vec{V}_g$ aufspalten lässt. Bestimmen Sie diese Anteile für die beiden Vektorfelder $\vec{V}_5 = (x + y, y, 0)$ und $\vec{V}_6 = (xy, yz, zx)$.

f) Bestimmen Sie für den rotationsfreien Anteil $V_{g,5}$ des Vektorfelds $\vec{V}_5$ aus Teil e) ein Skalarpotential

$$\varphi_5(\vec{x}) = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \vec{V}_{g,5}(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

und für den divergenzfreien Anteil $V_{s,5}$ ein Vektorpotential

$$\vec{A}_5(\vec{x}) = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \left[t\vec{V}_{s,5}(\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0))\right] \times (\vec{x} - \vec{x}_0),$$

so dass $\vec{V}_5 = \operatorname{grad}\varphi_5 + \operatorname{rot}\vec{A}_5$. *Hinweis: Wählen Sie* $\vec{x}_0 = 0$.

Aufgabe 7.4 *Stromdurchflossener Leiter*

Das magnetische Feld eines unendlichen stromdurchflossenen Leiters ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y, x, 0).$$

Das Feld lässt sich in Zylinderkoordinaten schreiben als:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(0\,\hat{\vec{e}}_r + \frac{1}{r}\,\hat{\vec{e}}_\varphi + 0\,\hat{\vec{e}}_z\right).$$

a) Überprüfen Sie, dass das Feld quellenfrei ist ($\operatorname{div}\vec{B} = 0$).

b) Überprüfen Sie, dass das Feld wirbelfrei ist ($\operatorname{rot}\vec{B} = 0$).

c) Das magnetische Feld ist aber nicht konservativ. Berechnen sie das Linienintegral für einen geschlossenen Weg um den Leiter, einen Kreis mit Radius $r = 1$, $\vec{r}(r, \varphi) = r\,\hat{\vec{e}}_r + \varphi\,\hat{\vec{e}}_\varphi + 0\,\hat{\vec{e}}_z$.

d) Finden Sie in Zylinderkoordinaten eine lokale Potentialfunktion, so dass $\vec{B} = \operatorname{grad}\Phi$
Hinweis: die Differentialoperatoren lauten in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\Phi &= (\partial_r\Phi, \frac{1}{r}\partial_\varphi\Phi, \partial_z\Phi) \\
\operatorname{div}\vec{B} &= \frac{1}{r}\partial_r(rB_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi B_\varphi + \partial_z B_z \\
\operatorname{rot}\vec{B} &= \left(\frac{1}{r}\partial_\varphi B_z - \partial_z B_\varphi\right)\hat{\vec{e}}_r + (\partial_z B_r - \partial_r B_z)\,\hat{\vec{e}}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\partial_r(rB_\varphi) - \partial_\varphi B_r\right)\hat{\vec{e}}_z
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

Wie muss die Konstante γ gewählt werden, damit das Vektorfeld

$$\vec{a}(\vec{r}) = (\gamma x_1^2 - x_2 x_3, x_1 x_2 - \gamma^2 x_3^2, (2-\gamma) x_1 x_3),$$

quellenfrei ($\operatorname{div} \vec{a} = 0$) ist? Kann man γ auch so wählen, dass $\vec{a}$ wirbelfrei ist ($\operatorname{rot} \vec{a} = 0$)?

Ergänzungsaufgabe 7.6 *Vektoranalysis: Identitäten*

Überprüfen Sie die Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (x^2 + y^2 z, y^2 + z^2 x, z^2 + x^2 y)$.

Abgabe: Dienstag, 11.12.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).