WiSe 2007/08 9.11.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
`www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey`

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

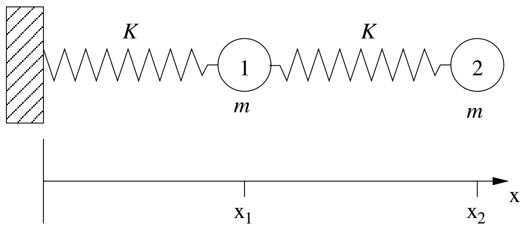
(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 4

Tutoriumsaufgabe 4.1 *Gekoppelte harmonische Schwingungen I*

Wofür braucht man in der Physik die Theorie der linearen Systeme mit den Eigenwerten und Eigenvektoren? In dieser Aufgabe soll das in der Vorlesung angegebene Beispiel durchgearbeitet werden.

a) Gegeben sei das folgende System zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren mit der Federstärke K und identischer Masse m:



Das „Experiment" finde im Weltraum statt, und zwar an einer Stelle, wo die Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Es seien nur eindimensionale Bewegungen entlang der x-Achse möglich.

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Teilchen 1 und 2 in den Koordinaten $x_1(t)$, $x_2(t)$ auf. Die kräftefreien Ruhepositionen werden durch x_1^0, x_2^0 angegeben.

Zur Erinnerung: Die Trägheitskraft eines Körpers berechnet sich nach Newton mit $F = m\ddot{x}$, und das Hooksche Gesetz für die Kraft einer Feder mit der Federkonstanten K bei Stauchung/Dehnung um den Wert x lautet $F = -Kx$.

b) Transformieren Sie die Gleichungen nun auf Variablen δx_1, δx_2, die die Abweichung zu den kräftefreien Ruhepositionen x_1^0, x_2^0 angeben, und notieren Sie diese in Matrixschreibweise. Benutzen Sie zur Lösung den Ansatz

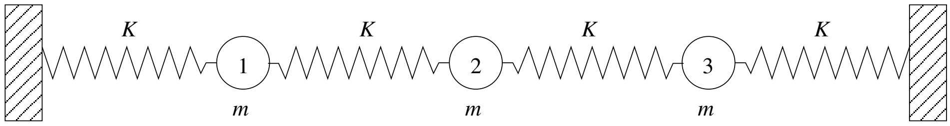
$$\delta\vec{x}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t.$$

Dies führt auf ein Eigenwertproblem in der Form

$$M \cdot \delta\vec{x}(t) = \lambda\delta\vec{x}(t), \quad \text{wobei} \quad \delta\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \geq 0. \tag{1}$$

Die Matrix M ist symmetrisch, wobei $M_{12} = -1$. Wie lautet die gesamte Matrix M und wie ist λ definiert?

c) Wie lautet das Eigenwertproblem für folgendes System?:



Tutoriumsaufgabe 4.2 *Tensoren*

Gegeben eine Drehmatrix D (Tensor 2. Stufe), dann gelten die folgenden Transformationsgesetze:

		Vorz.W.?			Vorz.W.?
Skalar:	$s' = s$	nein	Pseudoskalar:	$s' = (\det D)\, s$	ja
Vektor:	$x'_i = D_{ij}x_j$	ja	Pseudovektor:	$x'_i = (\det D\,)D_{ij}x_j$	nein
Tensor 2. Stufe:	$T'_{ij} = D_{ik}D_{jl}T_{kl}$	nein	...		

Für eine eigentliche Drehung gilt immer $\det D = +1$, bei einer Drehung zusammen mit einer Spiegelung ist $\det D = -1$. (Vorz.W. = Vorzeichenwechsel unter Inversion)

a) Wie lautet D für eine Spiegelung am Ursprung in drei Dimensionen?

b) Klassifizieren sie durch Anwendung dieser Drehmatrix D die folgenden Größen:
   (i) Energie E,
   (ii) Ortsvektor $\vec{r}$,
   (iii) Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$,
   (iv) Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$,
   (v) Einheitsmatrix $\mathbb{I}$
   (vi) Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{ijk} = \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$, mit den kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_i$. Hierfür benötigen Sie die Definition der Determinante für einen allgemeinen Tensor D.

Aufgabe 4.3 *Gekoppelte harmonische Schwingungen II*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von Gl. (1) bzgl. des Systems aus 4.1 a) und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.

b) Die allgemeine Lösung des linearen Gleichungsystems (1) erhält man durch Überlagerung der Fundamentallösungen in folgender Weise:

$$\delta\vec{x}(t) = \vec{v}_1(a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t) + \vec{v}_2(a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t) \tag{2}$$

Bestimmen Sie die 4 Konstanten a_1, b_1, a_2, b_2 aus den Anfangsbedingungen

$$\delta\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta\dot{\vec{x}}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Setzten nun für alles folgende $K/m = 1$ und notieren Sie die allgemeine Lösung $\delta\vec{x}(t)$. Zeichnen Sie $\delta\vec{x}(t)$ Mithilfe des Computers.

c) Berechnen Sie

$$W = \frac{1}{2}\left(\delta\dot{\vec{x}}^{\,2} + \left[(\delta x_1 - \delta x_2)^2 + \delta x_1^2\right]\right) \tag{4}$$

und interpretieren Sie das Ergebnis. Zu welcher wichtigen physikalischen Größe ist W proportional? Hierzu kann es hilfreich sein, die eckige Klammer in Gl. (4) nach x_1 und x_2 abzuleiten.

Aufgabe 4.4 *Matrixrepräsentation der komplexen Zahlen*

Gegeben seien $x, y \in \mathbb{R}$, die Einheitsmatrix $\mathbb{I} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sowie die Matrix $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung $z = x\mathbb{I} + y\sigma$ eine Gruppe G bildet.

Eine Gruppe im mathematischen Sinne wird folgendermaßen definiert:

(G0) Wenn a und b Elemente aus G sind, dann ist das Produkt $a \cdot b$ ebenso ein Element aus G; d. h. G ist abgeschlossen, $G \times G \to G$.

(G1) Die Multiplikation ist assoziativ, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(G2) Es existiert ein Einheitselement e in G, mit:

- $e \cdot a = a$ für jedes Element a aus G.
- Für jedes Element a aus G existiert ein inverses a^{-1}, sodass $a \cdot a^{-1} = e$.

b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2^T$ und $z \cdot z^T$.

c) Wir transformieren nun die Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ auf zwei andere Zahlen $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in \mathbb{R}$ durch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Wie lautet die inverse Transformation? Wie lautet in der Darstellung r, φ das Produkt $z_1 \cdot z_2$? Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

d) Berechnen Sie $f(z) = z^{-1}(\mathbb{I} + z^2)$ für ein z mit $r = 1$.

e) Unter Hinzunahme von entsprechenden Eigenschaften für die Addition, die leicht zu zeigen sind, bildet G den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Eine alternative Darstellung kennen Sie schon: $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$. Welcher Operation in der Matrixdarstellung entspricht die komplexe Konjugation $z^* = x - iy$?

Aufgabe 4.5 *Drehungen*

Die allgemeine Drehmatrix D für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um den Winkel α bezüglich der Achse $\hat{n}$ hat folgende Komponenten:

$$D_{ij} = (1 - \cos\alpha)\, n_i n_j + \cos\alpha\, \delta_{ij} + \sin\alpha\, \epsilon_{ikj} n_k. \tag{5}$$

Hierbei ist der Vektor der Drehachse $\hat{n}$ ein Einheitsvektor mit den Komponenten $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$. Im letzten Summand von Gl. (5) impliziert ferner die Summenkonvention eine Summierung über k.

a) Berechnen Sie $D \cdot D^T$. Was besagt das Ergebnis?

b) Zeigen Sie, dass $\hat{n}$ ein Eigenvektor von D ist. Was ist der Eigenwert?

c) Wie lautet die Drehmatrix D für eine Drehung um $\pi/2$ bezüglich der Achse $(1, 2, 0)$? Überprüfen Sie an diesem konkreten Beispielen explizit, dass D eine Drehmatrix ist.

Finden Sie damit den Vektor, der die Länge 2 hat und *nach* der Drehung durch D mit der x-Achse zusammenfällt.

Ergänzungsaufgabe 4.6

Ergänzungsaufgaben sind zur Selbstkontrolle gedacht oder bringen wichtige Ergänzungen, die in der Vorlesung und den Tutorien nicht behandelt werden konnten. Wir empfehlen sehr, sie zu rechnen; die Lösungen werden in der Musterlösung angegeben.

Ist das zu folgender Matrix gehörende homogene Gleichungssystem linear unabhängig?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Dienstag, 20.11.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).