WiSe 2007/08 2.11.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 3

Tutoriumsaufgabe 3.1 *Lineare Gleichungen, Eigensystem*

Gegeben seien zwei Gleichungssysteme:

$$\frac{x}{7} + \frac{3}{14}y = 0, \quad -\frac{2}{7}x - 9\frac{y}{21} = 0 \tag{1}$$

$$u + 3v = 0, \quad 2(u+v) = 0 \tag{2}$$

a) Notierten sie diese in Matrixschreibweise. Entscheiden Sie dann zunächst anhand der Determinante, was für Lösungen möglich sind und geben Sie diese dann an.

b) Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix, die sich aus dem System (2) ergibt.

Tutoriumsaufgabe 3.2 *Drehmatrizen I*

Eine Drehmatrix M ist eine reelle quadratische Matrix mit folgenden Eigenschaften:

- $M^T \cdot M = I$ (die transponierte Matrix M^T ist gleich der inversen Matrix M^{-1}),
- $\det M = +1$ (die Determinante ist 1).

Welche der folgenden Matrizen sind Drehmatrizen? Berechnen Sie für M_1 bis M_4 ggf. den Drehwinkel.

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.48 & 0.64 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3 *Matrixalgebra*

Gegeben seien 3 Gleichungssysteme ($x, y, z, i, \epsilon \in \mathbb{R}$)

$$-x + 4y + 2z = 0, \quad 3x = 0, \quad -6z = 0, \tag{3}$$

$$3 + 9i = 0, \quad -1 + 2i = 0, \tag{4}$$

$$3 + 5\epsilon - 8\epsilon^2 + 9\epsilon^4 = 0, \quad -2\epsilon + 7\epsilon^2 - 4\epsilon^3 + \epsilon^4 = 0, \tag{5}$$

und einige Matrizen verschiedener Dimension:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1/4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 23 & 6 & 0 & 7 & -23 \\ 6 & 0 & -10 & 17 & 1 \\ 11 & -2 & -7 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} 12 & -2 & -7 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -10 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Formulieren Sie zunächst die Gleichungssysteme (3) bis (5) als homogene Matrixgleichungen mit den Matrizen M_1, M_2 und M_3.

b) Bilden Sie alle möglichen Produkte jeweils zweier der Matrizen M_1 bis M_7 untereinander, und zwar in der Reihenfolge aufsteigender Indizes.

c) Transponieren Sie die resultierenden Matrizen.

d) Der restliche Teil dieser Aufgabe bezieht sich nun auf diejenigen Matrizen aus Teil c), die eine Dimension ≤ 3 haben. Wie lautet deren Determinante? Sind diese Matrizen invertierbar?

e) Bilden Sie, falls möglich, die zugehörigen inversen Matrizen.

Aufgabe 3.4 *Drehmatrizen II*

a) Eine Drehung in der Ebene um den Winkel α wird beschrieben durch die Matrix

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, dass das Hintereinanderausführen von zwei Drehungen mit Drehwinkeln α und β *um dieselbe Achse* auch durch eine Drehung mit dem Drehwinkel $\alpha+\beta$ beschrieben werden kann. Zeigen Sie damit die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

b) Drehungen um die Koordinatenachsen in 3 Dimensionen werden durch die folgenden Matrizen beschrieben:

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(Drehung um } x\text{-Achse)}$$

$$M_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(Drehung um } y\text{-Achse)}$$

$$M_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Drehung um } z\text{-Achse)}$$

(i) Zeigen Sie: Drehungen um verschiedene Achsen können im allgemeinen nicht in beliebiger Reihenfolge hintereinander ausgeführt werden, d.h. $M_x(\alpha)M_y(\beta) \neq M_y(\beta)M_x(\alpha)$.

(ii) Für welchen Winkel α gilt $M_x(\alpha)M_y(\alpha) = M_z(\alpha)$? Interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

(iii) Zeigen Sie auch hier die Additiontheoreme durch Hintereinanderausführung zweier Drehungen um die z-Achse.

c) Der Vektor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ werde zunächst um den Winkel $\pi/6$ um die y-Achse gedreht, dann um $\pi/2$ um die x-Achse und schließlich $\pi/4$ um die z-Achse. Wie lautet die Matrix für die gesamte Drehung und wie der resultierende Vektor $\vec{v}\,'$? Zeigen Sie, dass die Multiplikation der drei Matrizen assoziativ ist und dass die Norm des Vektors bei den Drehungen erhalten bleibt. *Erinnerung aus der Schule: In den Rechnungen sollen keine Dezimalzahlen ausgeschrieben werden!*

d) Den Vektor $\vec{v}\,''$ erhalten Sie nun, indem Sie die Drehung in genau umgekehrter Reihenfolge ausführen, d. h. erst um die z-Achse, dann um die x-Achse und zum Schluss um die y-Achse. Wie lautet die Differenz der Vektoren $\vec{v}\,'$, $\vec{v}\,''$?

Aufgabe 3.5 *Spinmatrizen*

Eine mögliche Darstellung von quantenmechanischen Teilchen mit Spin 1 benutzt die folgenden Matrizen:

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren nun den sogenannten Kommutator durch $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$; außerdem ist $i^2 = -1$. Berechnen Sie:

a) Die Eigenwerte aller M_j,

b) $[M_x, M_y]$, $[M_y, M_z]$, $[M_z, M_x]$,

c) $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$,

d) $[M^2, M_j]\,\forall j$.

Abgabe: Dienstag, 13.11.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).