WiSe 2007/08 26.10.2007

Ludwig Maximilians Universität

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
`www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey`

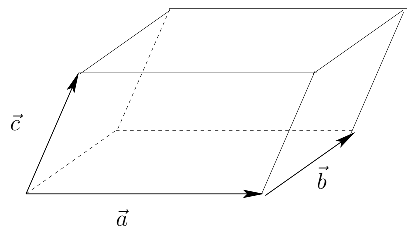
R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungen 2

Tutorial 2.1 *Spatprodukt*

a) Begründen Sie mit Hilfe der koordinatenfreien Darstellung von Skalar- und Vektorprodukt: Der Rauminhalt des Parallelepipeds (siehe Zeichnung) ist gegeben durch das *Spatprodukt* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Welche anderen Spatprodukte, gebildet aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, ergeben ebenfalls den Rauminhalt?



b) Zeigen Sie:
  (i) In einem Spatprodukt kann man "Kreuz und Punkt vertauschen"
  (ii) In einem Spatprodukt kann man die Reihenfolge der Vektoren zyklisch vertauschen
  (iii) Wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Linkssystem von Vektoren sind, ist das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ negativ, sein Betrag ergibt aber wieder den Rauminhalt des Parallelepipeds.

c) Berechnen Sie das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ für $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{b} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $\vec{c} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Tutorial 2.2 *Lineare Unabhängigkeit*

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ heißen *linear unabhängig*, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur "trivial" als Linearkombination aus ihnen darstellen läßt, d.h. wenn gilt:

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Lassen sich Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \neq 0$ finden, so sind die Vektoren linear abhängig.

Prüfen Sie die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ auf lineare Abhängigkeit und berechnen Sie das von ihnen aufgespannte Volumen:

a) $\vec{a}_1 = (3, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (0, -1, 2)$.

b) $\vec{a}_1 = (0, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, 0)$, $\vec{a}_3 = (-2, 5, -3)$.

Aufgabe 2.3 *Vektoren im gleichseitigen Tetraeder*

Vier gleich große Kugeln (Radius R) kann man dreidimensional so zusammenschieben, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Die Mittelpunkte kann man auch als Ecken eines Würfels auffassen, dann ist der Mittelpunkt des Tetraeders identisch mit dem Mittelpunkt des Würfels. Benutzen Sie die Kanten des Würfels als Achsen eines kartesischen Koordinatensystems (die Kantenlänge als Einheit) und klären Sie mithilfe von Vektoren und Skalarprodukten in diesen Koordinaten folgende Fragen:

a) Welche Koordinaten haben die vier Kugelzentren? (Vorschlag: Kugel 1 hat $\vec{r}_1 = (0,0,0)$, Kugel 2 hat $\vec{r}_2 = (1,1,0)$, etc.)

b) Welcher Vektor führt zum Mittelpunkt des Tetraeders?

c) Welchen Winkel bilden die Verbindungslinien von den Kugelmittelpunkten zum Tetraedermittelpunkt?

d) Wie lang sind diese Verbindungslinien?

e) Wie lang sind die Kanten des Tetraeders?

f) Wie hoch ist die Figur der vier Kugeln, wenn man sie so stellt, dass 3 Kugeln unten in einer Ebene liegen? Dazu zuerst: Wie hoch liegt die Spitze des Tetraeders über der Ebene durch die drei anderen Ecken?

g) Wie hoch liegt der Mittelpunkt des Tetraeders über einer Tetraederfläche?

h) Wie weit sind die Ecken des Tetraeders vom Fußpunkt der Höhe entfernt?

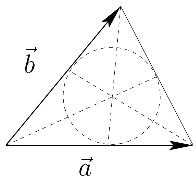
i) Welchen Winkel bilden die Kanten des Tetraeders mit seinen Flächen?

Geben Sie die gefragten Längen auch in Einheiten der Kugelradien an.

Aufgabe 2.4 *Vektorielle Beweise*

Zeigen Sie: die Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Kanten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b} - \vec{a}$ schneiden sich in einem Punkt.

Hinweis: die Winkelhalbierende zwischen den Kanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat die Parameterdarstellung $\vec{x} = \lambda \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$. Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass dieser Punkt der Mittelpunkt des Inkreises ist.



Aufgabe 2.5 *Gedrehte Bahnkurve*

Gegeben sei die Bahnkurve eines Massenpunktes $\vec{r}(t) = (R_x \cos(\omega t), R_y \sin(\omega t), 0)$.

a) Beweisen Sie, dass diese Raumkurve eine Ellipse ist und die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} = 1,$$

erfüllt. Zeichen Sie diese Ellipse in eine Ebene mit den Achsen x und y.

b) Für welche Zeit(en) t erfüllt der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{\omega^2 R_x^2}{4} + \frac{3}{4}\omega^2 R_y^2}$?

Hinweis: Man erhält den Vektor der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ aus der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch eine zeitliche Ableitung,

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t).$$

c) Transformieren Sie nun die Bahnbewegung in ein Koordinatensystem, in dem sich die im Teil a) gezeichnete xy-Ebene im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die z-Achse dreht. Wie lautet die Drehmatrix $\mathbf{M}(\Omega t)$ für diese zeitabhängige Transformation und wie die Bahnkurve im neuen Koordinatensystem?

   Zeichnen Sie die Bahn beispielhaft für eine Kombination von Parameterwerten, in denen eine sich drehende Ellipse zu erkennen ist. Benutzen Sie dazu einen Computerprogramm, zum Beispiel Mathematica, Maple oder gnuplot.

d) Wann ergeben sich geschlossene Bahnkurven?

Abgabe: Dienstag, 6.11.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock)